Archiv für Elektrotechnik

XVII. Band. 4. Heft 1926.

Die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit[1].

Von

Wilhelm Cauer.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.
Kapitel I.
1. Erklärungen, Voranssetzungen und mathematische Formulierung des Problems.
Kapitel II. Netze mit nur zwei Widerstandsarten (Ohmsche Widerstände und Kapazitäten, Kapazitäten und Selbstinduktionen einschließlich gegenseitiger Induktionen, Selbstinduktionen einschließlich gegenseitiger Induktionen und Ohmsche Widerstände).
2. Endliche Netze.
3. Unendliche Netze[2].
4. Die Bedingungen für die Realisierbarkeit eines Widerstandes.
Kapitel III. Netze mit Selbstinduktionen, gegenseitigen Induktionen, Ohmschen Widerständen und Kapazitäten.
5. Zweimaschige Netze: Notwendige Bedingungen.
6. Zweimaschige Netze: Lösung der Aufgabe und hinreichende Bedingungen.
7. Zweimaschige Netze: Diskussion und Vereinfachung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen.
8. Netze mit einer beliebigen Zahl von Freiheitsgraden: Notwendige Bedingungen[2].
9. Netze mit einer beliebigen Zahl von Freiheitsgraden: Ansatz zur Lösung[2].
10. Netze mit einer beliebigen Zahl von Freiheitsgraden: Eine besondere die nach Kapitel II realisierbaren Widerstände umfassende Klasse von Widerständen.
Zusammenfassung der Resultate.
Anmerkungen.
Literatur.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, Netze von Selbstinduktionen, gegenseitigen Induktionen, positiven Ohmschen Widerständen und Kapazitäten anzugeben, deren zwischen zwei Zuführungsklemmen gemessener Wechselstromwiderstand in vorgeschriebener Weise von der Frequenz des Wechselstroms abhängt. Es ist dieses die Umkehrung der bekannten und stets eindeutig lösbaren Aufgabe, zu einem gegebenen Netz den Widerstand zu berechnen. Wesentlich ist die Forderung, daß der Netzwiderstand für alle Frequenzen mit einer vorgeschriebenen Funktion übereinstimmt. Unmittelbar mit unserem Problem hat sich meines Wissens bisher nur Foster befaßt (Lit. 7 und 9)[1]. Den Fall, daß nur Netze mit zwei Maschen zugelassen werden, hat Foster in sehr vollständiger und für die Praxis brauchbarer Weise gelöst. Wenn wir uns hier trotzdem u. a. auch mit diesem Fall ausführlicher beschäftigen, so geschieht das einmal deshalb, weil Fosters Darstellung den Hauptwert auf die Resultate legt, ohne auf ihre Ableitung genauer einzugehen, und dann, weil sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit eines Widerstandes einfacher und physikalisch wie mathematisch durchsichtiger als bei Foster formulieren lassen und die hier gegebene Lösungs-

[1] Gekürzter Abdruck der als Dissertation an der Technischen Hochschule zu Berlin bei der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften eingereichten Schrift. (Referent: Prof. Dr. G. Hamel, Korreferent: Prof. Dr.-Ing. ehr. Dr. K. W. Wagner.)

[2] 3., 8. und 9. sind hier nicht abgedruckt.

methode eine Verallgemeinerung auf Netze mit einer beliebigen Zahl von Freiheitsgraden erlaubt.

Das von uns behandelte Problem ist als Spezialfall in dem verallgemeinerten Siebkettenproblem enthalten, das darin besteht, Netze mit zwei Paaren von freien Klemmen anzugeben, so daß zwischen Spannung und Strom am Eingang und Spannung und Strom am Ausgang Beziehungen gelten, die als Funktion der Frequenz vorgeschrieben sind (z. B. Aussiebung, d. h. Unterdrückung, oder Durchlassung von bestimmten Frequenzbereichen). Die Eigenschaften einer symmetrischen Siebkette können ja durch ihren Kurzschluß- und Leerlaufwiderstand charakterisiert werden. Das verallgemeinerte Siebkettenproblem ist noch nicht gelöst. Man hat bisher immer nur in systematischer Weise das Verhalten gewisser Netze (Kettenschaltungen) als Siebketten berechnet[2]), ist aber nicht in der Lage, die Frage zu beantworten, ob eine Siebkette von gewünschtem Verhalten überhaupt realisierbar, und, wenn, in welcher Weise sie realisierbar ist. Die Siebkettenfrage gab auch den Anstoß zu den zitierten Arbeiten von Foster (vgl. Lit. 5). Umgekehrt kann sie bis zu einem gewissen Grade auf unsere Fragestellung

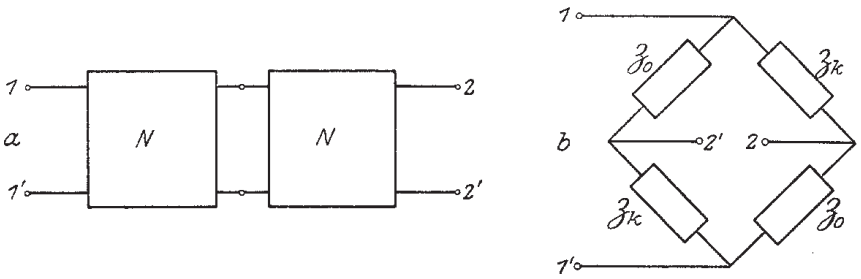

Bild 1. Zwei gleichwertige Schaltungen.

zurückgeführt werden (Lit. 5). Jedes vierpolige Netz, das nach Bild 1a eine Zerlegung in zwei spiegelbildlich gleiche Netze zuläßt, die ganz beliebig und unsymmetrisch sein können, so daß zwischen den beiden Teilen nur in zwei Punkten ein Zusammenhang besteht, ist nämlich hinsichtlich der Beziehungen zwischen Spannung $\mathfrak{E}_1$ und Strom J_1 am Eingang und Spannung $\mathfrak{E}_2$ und Strom J_2 am Ausgang der Brückenschaltung Bild 1b gleichwertig[3]). Darin bedeutet $\mathfrak{z}_0$ den Leerlauf- und $\mathfrak{z}_k$ den Kurzschlußwiderstand eines Teilnetzes N, von den Eingangs- oder Ausgangsklemmen gemessen. Bei Beschränkung auf derartige Netze ist hierdurch offenbar jene Zurückführung geleistet.

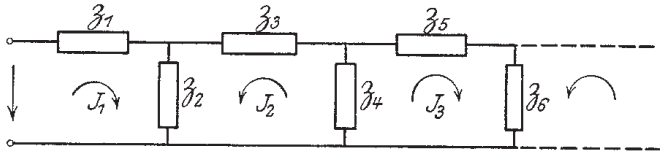

Bild 2.

Speziell die in Bild 2 für $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_3$, $\mathfrak{z}_4 = \mathfrak{z}_5 = \mathfrak{z}_6 = \ldots = 0$ als Sonderfall enthaltene T-Schaltung ist bei beliebigen $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ einer Brückenschaltung nach Bild 1b gleichwertig, wenn $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}_1 + 2\,\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_k = \mathfrak{z}_1$ gemacht wird. Hierdurch folgt aber umgekehrt, wie sich leicht an Beispielen zeigen läßt, daß nicht jedem Netz Bild 1a, d. h. jedem $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_k$ auch physikalisch mögliche $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, d. h. eine gleichwertige T-Schaltung zugehört. Für die *II*-Schaltung, die aus Bild 2 für $\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_4$, $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_5 = \mathfrak{z}_6 = \mathfrak{z}_7 = \ldots = 0$ hervorgeht, gilt dasselbe. Während bekanntlich für eine bestimmte Frequenz jeder symmetrischen Vierpolschaltung eine gleichwertige T- oder *II*-Schaltung entspricht, ist es also nicht mehr so, wenn Äquivalenz für alle Frequenzen verlangt wird.

Ich glaubte zunächst, daß eine Anwendung der in dieser Arbeit benutzten Kettenbruchlehre auf Schaltungsprobleme neu sei[4]). Erst vor kurzem wurde ich von Herrn Foster liebenswürdigerweise auf einige neuere Arbeiten der Research Staff of the General Electric Company (Lit. 14—19) aufmerksam gemacht, die verschiedene Berührungspunkte mit der hier gestellten Frage aufweisen und auch Kettenbrüche benutzen. Die dort behandelten speziellen Fälle der Verwirklichung vorgeschriebener Widerstandsfunktionen fügen sich leicht in den Rahmen der hier gegebenen Theorie ein. U. a. habe ich unabhängig die Lit. 18 angegebene Nachbildung von homogenen Leitungen durch Kettenschaltungen gefunden.

Soweit Beispiele gebracht sind, sollen sie nur die Anwendbarkeit der im wesentlichen mathematischen Ausführungen erläutern, und machen nicht den Anspruch, unmittelbar praktisch verwertbar zu sein. Das Anwendungsgebiet des hier behandelten Problems liegt hauptsächlich in der Schwachstromtechnik. Z. B. kann die Lösung unserer Aufgabe dazu benutzt werden, auch für Einschwingvorgänge gleichwertige Modelle von Leitungen zu Laboratoriumsuntersuchungen herzustellen.

Kapitel I.

Erklärungen, Voraussetzungen und mathematische Formulierung des Problems.

1.

Der Wechselstromwiderstand $\mathfrak{R}$ eines Netzes von Selbstinduktionen L_{ii}, gegenseitigen Induktionen L_{ik}, Ohmschen Widerständen R_{ik} und Kapazitäten C_{ik} mit zwei freien Klemmen ist als das Verhältnis von Spannung $\mathfrak{E}_1$ und Strom J_1 definiert. Wir betrachten periodische Spannungen

$$e = \mathrm{Re}\,\mathfrak{E}\,e^{\lambda t}\ ^{5}) \tag{1}$$

und Ströme

$$i = \mathrm{Re}\,J\,e^{\lambda t}$$

einer bestimmten Kreisfrequenz ω ($\lambda = i\,\omega$). Der Wechselstromwiderstand ist durch

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{E}_1}{J_1} \tag{2}$$

gegeben.

Im folgenden wird nun die Abhängigkeit des Widerstandes von dem Frequenzparameter λ auseinandergesetzt. In einem Netz von n Freiheitsgeraden lassen sich (auf mannigfaltige Weise) n geschlossene Kreise wählen, deren Ströme unabhängig sind und durch welche die Ströme sämtlicher Netzzweige durch algebraische Summierung bestimmt werden. Die Wahl der unabhängigen Kreise soll so getroffen sein, daß der Strom J_1 durch die freien Klemmen fließt.

Führt man zur Abkürzung

$$A_{ik} = \lambda^2 L_{ik} + \lambda R_{ik} + D_{ik} \qquad \left(D_{ik} = \frac{1}{C_{ik}}\right) \tag{3}$$

ein, so gelten für die Ströme die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_{11}J_1 + A_{12}J_2 + \ldots + A_{1n}J_n &= \lambda\,\mathfrak{E}_1 \\ A_{21}J_1 + A_{22}J_2 + \ldots + A_{2n}J_n &= 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ A_{n1}J_1 + A_{n2}J_2 + \ldots + A_{nn}J_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die L_{ik}, R_{ik}, D_{ik} können als Koeffizienten in den Verknüpfungsgleichungen (4) für Ströme und Spannungen definiert werden, woraus ihre genaue Bedeutung ersichtlich ist. Sie unterliegen aus physikalischen Gründen der Symmetriebedingung

$$A_{ik} = A_{ki} \tag{3a}$$

und den Einschränkungen

$$\sum_{i,k=1}^{n} L_{ik} x_i x_k \quad \text{positiv definit,} \tag{5a}$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} R_{ik} x_i x_k \quad \text{positiv definit,} \tag{5b}$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} D_{ik} x_i x_k \quad \text{positiv definit.} \tag{5c}$$

Negative Widerstände (Röhren) sollen von der Betrachtung ausgeschlossen sein. Für die R_{ik} und D_{ik} gelten noch weitere Einschränkungen. In dem Fall, daß Ohmsche Widerstände und Kapazitäten, wie meist in dieser Arbeit, nach Bild 2 geschaltet sind, lauten bei den im Bild angenommenen Stromrichtungen, die wir stets als positiv wählen wollen, die physikalisch notwendigen und hinreichenden Bedingungen, welche (5b) und (5c) umfassen:

$$R_{ii} - R_{i-1,\,i} - R_{i,\,i+1} \geq 0, \quad R_{ik} \geq 0^{6}), \tag{6a}$$

$$D_{ii} - D_{i-1,\,i} - D_{i,\,i+1} \geq 0, \quad D_{ik} \geq 0. \tag{6b}$$

Aus (4) ergibt sich nun

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{E}_1}{J_1} = \frac{a}{\lambda a_{11}} \tag{7}$$

als Funktion von λ. a bedeutet die Determinante $|A_{ik}|$, a_{11} das Komplement des Elementes A_{11}. Nach (3) und (7) ergibt sich somit für $\mathfrak{R}$ eine gebrochene rationale Funktion der Gestalt

$$\mathfrak{R} = \frac{a_0 \lambda^{2n} + a_1 \lambda^{2n-1} + a_2 \lambda^{2n-2} + \ldots + a_{2n}}{b_1 \lambda^{2n-1} + b_2 \lambda^{2n-2} + \ldots + b_{2n-1} \lambda} \tag{8}$$

mit reellen Koeffizienten.

Die physikalischen Einschränkungen für die Ohmschen Widerstände und Kapazitäten lassen sich allgemein einfach formulieren, wenn man nicht n unabhängige Ströme, sondern die $(n+k)$ Ströme $J_1', J_2', J_3', \ldots, J_{n+k}'$ aller einzelnen Netzzweige einführt[6a]). An Stelle des Gleichungssystems (4) tritt dann das äquivalente

$$\left.\begin{aligned}
&A_{11}' J_1' + A_{12}' J_2' + \ldots + A_{1,\,n+k}' J_{n+k}' + m_{11}\mu_1 + m_{21}\mu_2 + \ldots + m_{k1}\mu_k = \lambda \mathfrak{E}_1 \\
&A_{21}' J_1' + A_{22}' J_2' + \ldots + A_{2,\,n+k}' J_{n+k}' + m_{12}\mu_1 + m_{22}\mu_2 + \ldots + m_{k2}\mu_k = 0 \\
&\quad\cdots\cdots \\
&\quad\cdots\cdots \\
&A_{n+k,\,1}' J_1' + A_{n+k,\,2}' J_2' + \ldots + A_{n+k,\,n+k}' J_{n+k}' + m_{1,\,n+k}\mu_1 + m_{2,\,n+k}\mu_2 + \\
&\qquad + \ldots + m_{k,\,n+k}\mu_k = 0 \\
&m_{11} J_1' + m_{12} J_2' + \ldots + m_{1,\,n+k} J_{n+k}' = 0 \\
&m_{21} J_1' + m_{22} J_2' + \ldots + m_{2,\,n+k} J_{n+k}' = 0 \\
&\quad\cdots\cdots \\
&\quad\cdots\cdots \\
&m_{k1} J_1' + m_{k2} J_2' + \ldots + m_{k,\,n+k} J_{n+k}' = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Hierin ist jetzt

$$A_{ik}' = \lambda^2 L_{ik}' + (\lambda R_i + D_i)\,\delta_{ik}, \tag{3b}$$

worin

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k. \end{cases}$$

Die letzten k-Gleichungen des Systems (4a) enthalten die k unabhängigen Kirchhoffschen Bedingungen für die $(k+1)$ Knotenpunkte des Netzes und können, was hier geschehen soll, in folgender Weise geschrieben werden: Es sind alle $m_{rs} = +1, 0$ oder -1, und unter den Zahlen $m_{1s}, m_{2s} \ldots m_{ks}$ sind bis auf eine oder zwei lauter Nullen. Sind m_{rs} und m_{ts} beide von Null verschieden, so haben sie entgegengesetztes Zeichen. Man kann dann durch Schluß von n auf $n+1$[7]) leicht zeigen, daß alle k-reihigen Unterdeterminanten aus den Koeffizienten der

letzten k Zeilen entweder den Wert + 1, 0 oder — 1 besitzen. Umgekehrt entspricht jedem derartigen System von Größen m_{rs} ein physikalisches Netz, wenn nicht alle jene k-reihigen Unterdeterminanten zugleich verschwinden. (7) entsprechend liefert die Auflösung von (4a), wenn wieder J_1' den durch die freien Klemmen fließenden Strom bedeutet,

$$\mathfrak{R} = \frac{a'}{\lambda a_{11}'}. \tag{7a}$$

Die R_{ik}' und D_{ik}' kommen diesmal nur als R_i und D_i in der Hauptdiagonale vor. Alle physikalischen Bedingungen sind jetzt in den Beziehungen

$$L_{ik}' = L_{ki}', \tag{3c}$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} L_{ik}' x_i x_k \quad \text{positiv definit}, \tag{5d}$$

$$R_i \geq 0, \tag{6c}$$

$$D_i \geq 0 \tag{6d}$$

erschöpft. Unser Problem läßt sich hiernach mathematisch so formulieren. Es ist erstens die Frage zu beantworten, unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen sich eine rationale Funktion $\lambda\mathfrak{R}$ der Form (8) als Quotient einer Determinante von der Form der Determinante des Gleichungssystems (4a), deren Elemente den Einschränkungen (3c), (5d), (6c) und (6d) und den angegebenen Relationen für die m_{rs} genügen, und dem Komplement ihres ersten Elementes A'_{11} darstellen läßt, und zweitens eine solche Darstellung wirklich anzugeben.

Aus der angeführten Eigenschaft der k-reihigen Determinanten, die aus den m_{rs} gebildet werden können, läßt sich folgern, daß alle in der Determinante vorkommenden Produkte, die nur R und D enthalten, das gleiche Vorzeichen $(-1)^k$ bekommen (vgl. Lit. 1). Während in (4) die Determinante a einen von der Wahl der Stromkreise unabhängigen Wert hat, unterscheidet sich die Determinante a' in (4a), wie auch die k-Knotenpunkte ausgewählt werden mögen, von a nur um den Faktor $(-1)^k$. Sind in Schaltung Bild 2 die Widerstände $\partial_1, \partial_3, \partial_5, \partial_7, \ldots$ nicht vorhanden, so ist $k = 1$ und $A_{1s}' = A_{s1}' = 0$, und es wird für diesen speziellen Fall[8]) in (7a)

$$a' = - \begin{vmatrix} A'_{22} & A'_{23} \ldots\ldots A'_{2,n+1} \\ A'_{32} & A'_{33} \ldots\ldots A'_{3,n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A'_{n+1,2} & A'_{n+1,3} \ldots A'_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

und

$$a_{11}' = \begin{vmatrix} A'_{22} & A'_{23} \ldots\ldots A'_{2,n+1} & 1 \\ A'_{32} & A'_{33} \ldots\ldots A'_{3\,n+1} & 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A'_{n+1,2} & A'_{n+1,3} \ldots A'_{n+1,n+1} & 1 \\ 1 & 1 \ldots 1 & 0 \end{vmatrix}$$

In dieser Arbeit wird nicht von der mehr symmetrischen Schreibweise (4a), sondern nur von der Schreibweise (4) Gebrauch gemacht. Es stellt sich nämlich heraus, daß die über (5) hinausgehenden physikalischen Einschränkungen (6) keinen Einfluß auf die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit eines Widerstandes haben.

Zur Vereinfachung der Darstellung soll angenommen werden, daß die Formen (5) eigentlich definit sind, daß sie also den Wert Null nur annehmen, wenn alle $x_i = 0$

sind. Die anderen Fälle ergeben sich dann leicht durch Grenzübergang. Wir betrachten aber im ersten Teil der Arbeit besondere Netze, in denen entweder überhaupt sämtliche $L_{ik} = 0$ oder alle $R_{ik} = 0$ oder alle $D_{ik} = 0$ sind. Benutzt man die Bezeichnungen l für die Determinante $|L_{ik}|$, l_{ik} für $\frac{\partial l}{\partial L_{ik}}$, l_{ikmn} für $\frac{\partial^2 l}{\partial L_{ik} \partial L_{mn}}$ usw. für die Determinanten niedrigeren Grades, und entsprechend r, r_{ik}, r_{ikmn} für die R_{ik} und d, d_{ik}, d_{ikmn} für die D_{ik}, so besagen (5a), (5b) und (5c), daß die drei Reihen von Hauptunterdeterminanten l, l_{11}, $l_{11\,22}, \ldots$; r, r_{11}, $r_{11\,22}, \ldots$; d, d_{11}, $d_{11\,22}, \ldots$ positiv sein müssen. Zu (6) muß dann noch hinzugefügt werden, daß in jedem geschlossenen Kreis die Summe der Ohmschen Widerstände und die Summe der reziproken Kapazitäten positiv ist.

Kapitel II.

Netze mit nur zwei Widerstandsarten (Ohmsche Widerstände und Kapazitäten, Kapazitäten und Selbstinduktionen einschließlich gegenseitiger Induktionen, Selbstinduktionen einschließlich gegenseitiger Induktionen und Ohmsche Widerstände)[1]).

2. Endliche Netze.

Sind keine Selbstinduktionen im Netz vorhanden, so erhält man für den Widerstand eines Netzes von n Freiheitsgraden (d. h. von n unabhängigen Stromkreisen) statt (8) die einfachere Form

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \frac{a_n \lambda^n + a_{n+1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_{2n}}{b_n \lambda^n + b_{n+1} \lambda^{n-1} + \ldots + b_{2n-1} \lambda} \\ &= \frac{H \cdot (\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_3)(\lambda + \lambda_5) \ldots (\lambda + \lambda_{2n-1})}{\lambda \cdot (\lambda + \lambda_2)(\lambda + \lambda_4) \ldots (\lambda + \lambda_{2n-2})}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Aus dem Umstand, daß die quadratische Form $\sum_{i,k=1}^{n} R_{ik} x_i x_k$ positiv definit ist, kann man nun schließen, daß sämtliche λ_ν reell sind und

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5 \ldots \leq \lambda_{2n-1} \tag{10a}$$

ist[2]). Ferner folgt aus (5b) $r > 0$, $r_{11} > 0$. Somit ist auch

$$H > 0. \tag{11}$$

Weil aber auch nach (5c) $\sum_{i,k=1}^{n} D_{ik} x_i x_k$ positiv definit ist, so müssen, wie die Transformation der Formenschar $\sum_{i,k=1}^{n} (\lambda R_{ik} + D_{ik}) x_i x_k$ auf Hauptkoordinaten sofort zeigt, sämtliche λ_ν positiv sein, so daß man weiter noch erhält

$$0 < \lambda_1. \tag{10b}$$

Jetzt soll gezeigt werden, daß die Bedingungen (10a), (10b), (11) die Einschränkungen, denen die Funktion (9) infolge der physikalischen Forderungen (3a), (5) und (6) unterliegt, erschöpfen, daß es also immer möglich ist, eine diesen Bedingungen genügende Funktion (9) durch Ohmsche Widerstände und Kapazitäten als Wechselstromwiderstand eines Netzes von n Freiheitsgraden zu realisieren, oder, was dasselbe ist, ein den Forderungen (3a), (5) und (6) genügendes Koeffizientenschema a_{ik} zu wählen, so daß $\mathfrak{R} = \frac{a}{\lambda a_{11}}$ wird. Nehmen wir an, dies sei für den Fall bewiesen, daß in (10a) nirgends das Gleichheitszeichen gilt, so muß die Behauptung erst recht richtig für den Fall sein, daß zwischen zwei oder mehreren der λ_ν Gleichheit besteht. Denn dann kann man den Widerstand $\mathfrak{R}$ durch Kürzen auf eine dem ersten Fall entsprechende Form bringen und ihn sogar durch ein

[1]) Vgl. Fußnote [2]) S. 355.

Netz von weniger als n Freiheitsgraden verwirklichen. Wir dürfen also uns beim Beweis unserer Behauptung auf den Fall beschränken, daß alle λ_ν voneinander verschieden sind. $\frac{1}{\lambda \mathfrak{R}} = \frac{a_{11}}{a}$ gestattet dann eine Partialbruchzerlegung[10]) von der Form

$$\frac{a_{11}}{a} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h_{2\nu-1}}{\lambda + \lambda_{2\nu-1}}. \tag{12}$$

Die $\lambda_{2\nu-1}$ sind hierin nach Voraussetzung positiv. Die $h_{2\nu-1}$ sind positiv, weil erstens zwischen zwei Polen von $\frac{a_{11}}{a}$ immer eine Nullstelle liegt und daher die $h_{2\nu-1}$ alle gleiches Zeichen haben müssen, und weil zweitens wegen (11) der Ausdruck $\frac{a_{11}}{a}$ für große λ positiv werden muß. Jetzt läßt sich leicht zeigen, daß als Koeffizientenschema von (4) die Matrix

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda+\lambda_1}{h_1} & \frac{\lambda+\lambda_1}{h_1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\lambda+\lambda_1}{h_1} & \left(\frac{\lambda+\lambda_1}{h_1} + \frac{\lambda+\lambda_3}{h_3}\right) & \frac{\lambda+\lambda_3}{h_3} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{\lambda+\lambda_3}{h_3} & \left(\frac{\lambda+\lambda_3}{h_3} + \frac{\lambda+\lambda_5}{h_5}\right) & \frac{\lambda+\lambda_5}{h_5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\lambda+\lambda_{2n-3}}{h_{2n-3}} & \left(\frac{\lambda+\lambda_{2n-3}}{h_{2n-3}} + \frac{\lambda+\lambda_{2n-1}}{h_{2n-1}}\right) & \end{vmatrix} \tag{13}$$

der Forderung (9) und den physikalisch notwendigen und hinreichenden Bedingungen gerecht wird.

Subtrahiert man die erste Zeile von der zweiten und sodann die erste Kolonne von der zweiten, hierauf die zweite Zeile von der dritten Zeile und weiter die zweite Kolonne von der dritten Kolonne usf., so erkennt man, daß

$$a = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda + \lambda_{2\nu-1}}{h_{2\nu-1}}. \tag{14}$$

Für a_{11} ergibt sich

$$a_{11} = \frac{\lambda+\lambda_1}{h_1} \cdot a_{11\,22} + \frac{h_1}{\lambda+\lambda_1} \cdot a.$$

$a_{11\,22}$ ist von derselben Form, wie a_{11} und läßt sich wieder entsprechend umformen. So erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\lambda+\lambda_1}{h_1} \cdot \frac{\lambda+\lambda_3}{h_3} \cdot a_{11\,22\,33} + \left(\frac{h_1}{\lambda+\lambda_1} + \frac{h_3}{\lambda+\lambda_3}\right) \cdot a \\ &= \ldots \\ &= a \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h_{2\nu-1}}{\lambda + \lambda_{2\nu-1}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Die Auflösung der Gleichungen (4) mit den Koeffizienten (13) liefert also tatsächlich (9) als Widerstand. Die physikalischen Forderungen (3a), (6a), (6b) sind offenbar erfüllt. Die Schaltung Bild 3 führt bei der Wahl (13) der Koeffizienten A_{ik} auf das Gleichungssystem (4), vorausgesetzt, daß $R_\nu = \frac{1}{h_{2\nu-1}}$, $C_\nu = \frac{h_{2\nu-1}}{\lambda_{2\nu-1}}$ gemacht wird. Dann wird nämlich

$$\left.\begin{aligned} R_{11} = R_{12} = R_1 = \frac{1}{h_1}, \quad R_{22} = R_1 + R_2 = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3}, \quad R_{23} = R_2 = \frac{1}{h_3}, \\ \ldots R_{nn} = R_{n-1} + R_n = \frac{1}{h_{2n-3}} + \frac{1}{h_{2n-1}} \end{aligned}\right\} \quad (16a)$$

$$\left.\begin{aligned} D_{11} = D_{12} = D_1 = \frac{\lambda_1}{h_1}, \quad D_{22} = D_1 + D_2 = \frac{\lambda_1}{h_1} + \frac{\lambda_3}{h_3}, \quad D_{23} = D_2 = \frac{\lambda_3}{h_3}, \\ \ldots D_{nn} = D_{n-1} + D_n = \frac{\lambda_{2n-3}}{h_{2n-3}} + \frac{\lambda_{2n-1}}{h_{2n-1}}. \end{aligned}\right\} \quad (16b)$$

Offenbar ist dann für jeden geschlossenen Kreis die Summe der Ohmschen Widerstände und die Summe der reziproken Kapazitäten positiv. Jedes Glied der Summe (12) entspricht einem Leitwert (reziproken Widerstand)

$$\frac{1}{R_v + \frac{1}{\lambda C_v}} = \frac{\lambda h_{2v-1}}{\lambda + \lambda_{2v-1}}$$

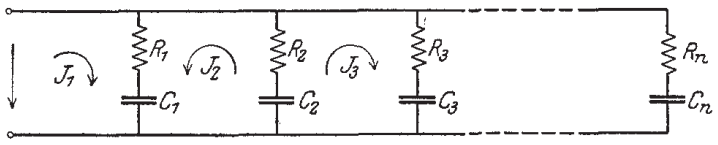

Bild 3. Eine den Widerstand eines beliebigen aus Ohmschen Widerständen und Kapazitäten bestehenden n-maschigen Netzes verwirklichende Schaltung.

und der gesamte Leitwert der Schaltung Bild 3 ist

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{R}} = \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{R_v + \frac{1}{\lambda \cdot C_v}}.$$

So ergibt sich die physikalische Realisierbarkeit des Widerstandes (9) unter den Voraussetzungen (10) und (11) auch ohne Benutzung der Gleichung (4) und ohne Zuhilfenahme von Determinanten einfach aus dem Satz, daß der Gesamtleitwert einer Reihe von parallel geschalteten Leitwerten gleich der Summe der einzelnen Leitwerte ist.

Liegt die Aufgabe vor, einen Widerstand der Form (9) durch ein Netz zu verwirklichen, so wird eine Partialbruchzerlegung nur selten praktisch leicht durchführbar sein. Glücklicherweise gibt es eine Reihe (9) verwirklichender Schaltungen, bei denen sich die Widerstände und Kapazitäten rational durch die Koeffizienten a_v, b_v ausdrücken und sich leicht berechnen lassen. Dabei fassen wir nur solche Schaltungen ins Auge, die keine größere Zahl Schaltungselemente, als in Bild 3 vorhanden sind, und demnach keine überflüssigen Elemente enthalten.

Setzen wir z für $\frac{1}{\lambda}$, so schreibt sich (9) in der Form

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{P}{Q} = \frac{b_n + b_{n+1} z + \ldots + b_{2n-1} z^{n-1}}{a_n + a_{n+1} z + \ldots + a_{2n-1} z^{n-1} + a_{2n} z^n}, \quad (9a)$$

(12) in der Form

$$\mathfrak{G} = \sum_{v=1}^{n} \frac{k_{2v-1}}{z + u_{2v-1}}, \quad (12a)$$

worin

$$k_{2v-1} = \frac{h_{2v-1}}{\lambda_{2v-1}} > 0$$

und

$$u_{2\nu-1} = \frac{1}{\lambda_{2\nu-1}} > 0$$

ist. Funktionen der Form (12a), allgemeiner Stieltjessche Integrale,

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u} \qquad (\psi(u) \text{ eine wachsende Funktion}),$$

sind besonders von Stieltjes untersucht worden. Die Ergebnisse der Stieltjesschen Theorie werden bei der Betrachtung von Schaltungen mit unendlich viel Elementen zum Zweck der Annäherung nicht rationaler Funktionen der Frequenz durch eine endliche Schaltung herangezogen werden[1]). Jetzt soll gezeigt werden, daß sich (9a) in den endlichen Stieltjesschen Kettenbruch

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{|D_1 z} + \frac{1}{|G_2} + \frac{1}{|D_3 z} + \ldots + \frac{1}{|G_{2n}} \tag{17}$$

entwickeln läßt. Bei einem Stieltjesschen Kettenbruch sind die Elemente D_1, G_2, ... positiv. Der Kettenbruch kann durch folgendes Divisionsverfahren gewonnen werden:

$$\left.\begin{aligned} Q &= P \cdot D_1 z + Q_1 \\ P &= Q_1 \cdot G_2 + P_1 \\ Q_1 &= P_1 \cdot D_3 z + Q_2 \\ &\vdots \\ Q_{n-1} &= P_{n-1} D_{2n-1} z + Q_n \\ P_{n-1} &= Q_n G_{2n}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

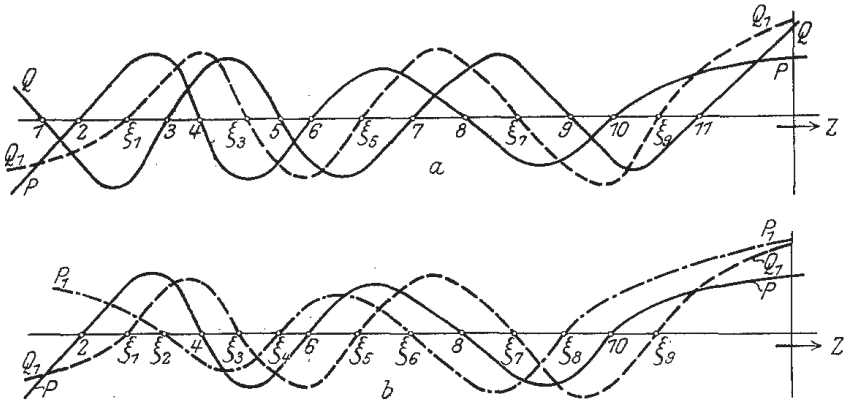

Bild 4. Zum Beweis der Entwicklungsmöglichkeit des Ausdrucks (9a) in ein Stieltjesschen Kettenbruch.

Hierin sind Q vom n-ten, P, Q_1 vom $(n-1)$-ten, P_1, Q_2 vom $(n-2)$-ten ..., P_{n-1}, Q_n vom 0-ten Grad. Die obige Behauptung besteht nun darin, daß sämtliche D_ν, G_ν positiv sind. Da bei der Festsetzung $a_n > 0$, die wir treffen wollen, alle Koeffizienten von (9) positiv werden, folgt zunächst $D_1 > 0$. $Q_1 = Q - P \cdot D_1 z$ hat offenbar an den Punkten $(-u_{2\nu-1})$ dasselbe Vorzeichen wie P, an den Punkten $\left(-\frac{1}{\lambda_{2\nu}}\right) = (-u_{2\nu})$ das Vorzeichen von Q. Die Nullstellen des Polynoms $(n-1)$-ten Grades Q_1, die $\xi_1, \xi_3, \xi_5, \ldots \xi_{2n-3}$ benannt werden sollen, sind also wieder alle reell und, wie in Bild 4a für $n = 6$ veranschaulicht wird, in folgender Weise verteilt:

[1]) Der betreffende hier nicht abgedruckte Abschnitt 3 „Unendliche Netze" der Dissertation enthält u. a. die in Lit. 18 angegebene Nachbildung von homogenen Leitungen durch Kettenschaltungen.

$$-u_1 < -u_2 < \xi_1 < -u_3 < -u_4 < \xi_3 < \ldots < -u_{2n-2} < \xi_{2n-3} < -u_{2n-1}.$$

Das Polynom $(n-2)$-ten Grades $P_1 = P - Q_1 G_2$ mit den Nullstellen $\xi_2, \xi_4, \xi_6 \ldots \xi_{2n-4}$ hat an den Punkten $-u_{2v}$ das entgegengesetzte Vorzeichen wie Q_1, an den Stellen ξ_{2v-1} dasselbe Vorzeichen wie P. Daher sind wieder alle Nullstellen ξ_{2v} reell, und ihre Verteilung ist nach Bild 4b durch

$$\xi_1 < \xi_2 < -u_4 < \xi_3 < \xi_4 < -u_6 < \xi_5 < \xi_6 < \ldots < \xi_{2n-4} < -u_{2n-2} < \xi_{2n-3}$$

gegeben.

Da die Nullstellen von P_1 und Q_1 sich gegenseitig trennen und beide für große z dasselbe Zeichen haben, so ist $\frac{P_1}{Q_1}$ eine Funktion gleicher Art wie $\frac{P}{Q}$, nur sind Zähler und Nenner je um einen Grad niedriger. Genau wie für P, Q geschlossen wurde, kann man daher auch für P_1, Q_1 schließen, wodurch die Behauptung bewiesen ist.

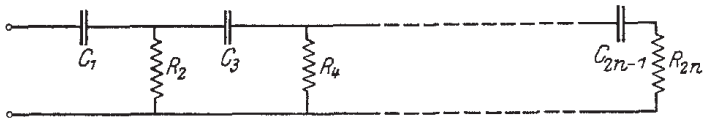

Bild 5. Eine den Widerstand eines beliebigen aus Ohmschen Widerständen und Kapazitäten bestehenden n-maschigen Netzes verwirklichende Schaltung.

Die Schaltung Bild 5 besitzt den Leitwert (17), wenn $C_{2v-1} = \frac{1}{D_{2v-1}}$, $R_{2v} = \frac{1}{G_{2v}}$ gemacht wird. Alle Widerstands- und Kapazitätswerte sind nach dem Verfahren (18) rational durch die Koeffizienten a_v, b_v ausgedrückt.

Statt $\mathfrak{G}(z)$ kann man auch $\mathfrak{R}(\lambda)$ in Partialbrüche zerlegen und erhält

$$\mathfrak{R} = R_0 + \sum_{v=0}^{n-1} \frac{m_{2v}}{\lambda + \lambda_{2v}} \quad (\lambda_0 = 0). \tag{19}$$

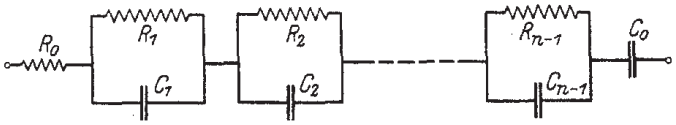

Bild 6. Eine den Widerstand eines beliebigen aus Ohmschen Widerständen und Kapazitäten bestehenden n-maschigen Netzes verwirklichende Schaltung.

Analog der Schlußweise von Seite 361 oben ergibt sich, daß auch hier außer $\lambda_{2v} > 0$ auch $m_{2v} > 0$ ist. Der Zerlegung (19) entspricht die zu Bild 3 duale Schaltung Bild 6, in welcher die Elemente die Werte $C_v = \frac{1}{m_{2v}}$ $(v = 0, 1, \ldots n-1)$, $R_v = \frac{m_{2v}}{\lambda_{2v}}$ $(v = 1, \ldots n-1)$ haben. Nach (19) hat $\mathfrak{R} - R_0$ dieselbe Gestalt wie (12a) für den Grenzfall $u_{2n-1} = 0$. Daher gestattet $\mathfrak{R}$ die Kettenbruchentwicklung

$$\mathfrak{R} = R_0 + \frac{1}{|C_1 \lambda} + \frac{1}{|R_2} + \ldots + \frac{1}{|C_{2n-1} \lambda} \tag{20}$$

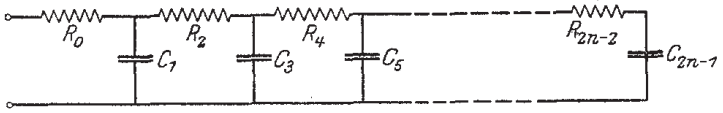

Bild 7. Eine den Widerstand eines beliebigen aus Ohmschen Widerständen und Kapazitäten bestehenden n-maschigen Netzes verwirklichende Schaltung.

mit positiven Werten C_1, $R_2 \ldots$, die man durch das Divisionsverfahren (18) erhält. Die Entwicklung (20) entspricht der Schaltung Bild 7. Nach den hier beschriebenen Methoden lassen sich auch eine große Zahl gemischter Schaltungen herstellen, die den gegebenen Widerstand (9) verwirklichen. Man braucht nur, wenn man mit einer der Methoden, sei es Partialbruchzerlegung oder Divisionsverfahren, begonnen hat, an irgendeiner Stelle abzubrechen, um dann den Rest oder einen Teil des übrigen Netzes durch eine der anderen Schaltungsarten darzustellen. Dabei kann es jedoch vorkommen, daß der restliche zu verwirklichende Widerstand einen Grenzfall von (9) ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2n-1} = \infty$ oder eine Kombination dieser beiden Fälle) darstellt. Diese Grenzfälle wollen wir nun untersuchen.

Sie entsprechen Fällen, in denen die Formen (5b) und (5c) semidefinit sind. Wird in der Schaltung Bild 3 irgendeine Kapazität, in der Schaltung Bild 5 C_1, in Bild 6 C_0, in Bild 7 C_{2n-1} unendlich groß, so bleibt der Widerstand (9) für sehr kleine Frequenzen endlich. Dies kommt dem Grenzübergang $\lambda_1 \to 0$ gleich. Verschwindet andererseits in Schaltung Bild 3 oder 5 irgend ein Widerstand, in Bild 6 oder 7 der Widerstand R_0, so verschwindet der Widerstand (9) für sehr große Frequenzen. Dies entspricht dem Grenzübergang $\lambda_{2n-1} \to \infty$ (wobei $\lim H\lambda_{2n-1}$ endlich). Andere Grenzübergänge bewirken nichts Neues, sondern nur, daß zwei innere λ_ν einander gleich werden, so daß sich im Zähler und Nenner von (9) je ein Faktor forthebt. Danach lassen sich unsere bisherigen Ergebnisse dahin erweitern:

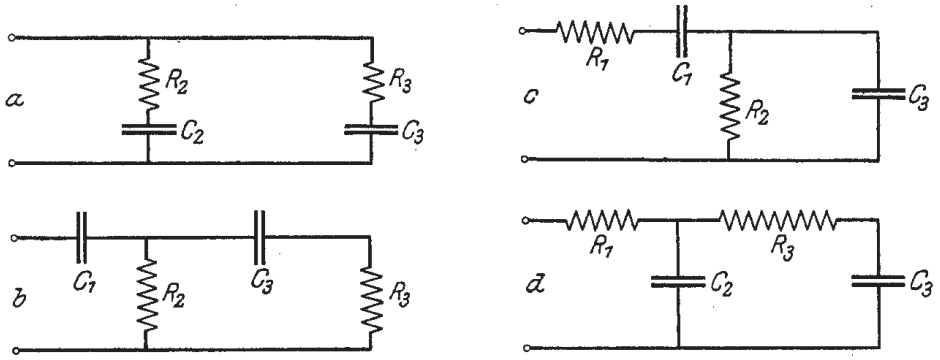

Bild 8. Die den Widerstand eines beliebigen aus Ohmschen Widerständen und Kapazitäten bestehenden zweimaschigen Netzes verwirklichenden Schaltungen ohne überflüssige Elemente.

Bild 9. Zusammensetzung von Schaltung Bild 8c aus den Schaltungen Bild 8d und 8b.

Satz I: Jeder durch ein Netz von n Freiheitsgraden aus Kapazitäten und Ohmschen Widerständen gebildete Widerstand hat bei den Bedingungen (10) und (11) die Form (9) mit Einschluß der Grenzfälle $\lambda_1 \to 0$, $\lambda_{2n-1} \to \infty$ (wobei $\lim H\lambda_{2n-1}$ endlich). Er läßt sich stets durch jede der Schaltungen Bild 3, 5, 6, 7 und durch jede Kombination dieser Schaltungen ersetzen. Bei solchen Kombinationen oder in den Grenzfällen müssen die Grenzwerte $R = 0$, $C = \infty$ zugelassen werden.

Dabei genügt es offenbar, dem ersten bzw. letzten Schaltelement den Grenzwert zu erteilen, wenn erforderlichenfalls die Zahl der Freiheitsgrade der Ersatzschaltung verringert wird. Welches der beiden Endelemente fortfällt, oder ob sie beide fortfallen, erkennt man an dem Verhalten von $\mathfrak{R}$ für sehr kleine und sehr große Frequenzen. Die im Satz I ausgesprochene Gleichwertigkeit der Schaltungen Bild 3, 5, 6, 7 mit einer beliebig gegebenen Schaltung von n Freiheitsgraden gilt

auch für komplexe λ, d. h. auch für beliebige nichtperiodische Vorgänge (Einschwingvorgänge).

Ist n speziell gleich 2, so ergeben sich im ganzen vier Schaltungsmöglichkeiten (Bild 8) nach den beschriebenen Methoden. Schaltung Bild 8c kann entweder durch Partialbruchzerlegung von $\mathfrak{R}$ oder durch Kombination von Schaltung Bild 8d mit 8b erhalten werden, wie Bild 9a zeigt. Der zweite Teil muß hier mit einer Kapazität endigen, weil die Schaltung Bild 9b für $\lambda = \infty$ den Widerstand Null besitzt. Hieraus geht auch hervor, daß die Partialbruchzerlegung für Schaltung Bild 8c zu Ausdrücken für die Kapazitäten und Widerstände führt, die in den a_ν, b_ν rational sind. Man erkennt auch, daß in dem speziellen Fall von zwei Freiheitsgraden mit den hier beschriebenen Methoden sämtliche überhaupt möglichen Schaltungsarten erschöpft werden, wenn keine überflüssigen Elemente (d. h. hier nicht mehr als vier) in der Schaltung vorkommen sollen:

Satz 1a: Jeder durch ein zweimaschiges Netz aus Ohmschen Widerständen und Kapazitäten gebildete Widerstand hat die Form

$$\mathfrak{R} = \frac{a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4}{b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda} \tag{21}$$

und läßt sich durch jede der Schaltungen Bild 8 darstellen. Bild 8 gibt die einzigen Schaltungen, welche dies leisten und keine überflüssigen Elemente enthalten.

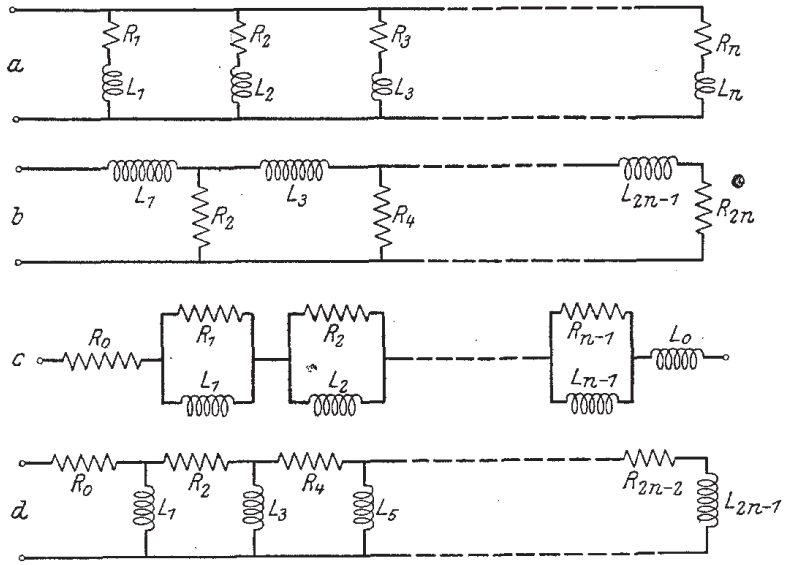

Bild 10. Schaltungen, die den Widerstand eines beliebigen aus Ohmschen Widerständen, Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen bestehenden n-maschigen Netzes verwirklichen.

In den anderen beiden Fällen, wo sich die Form $\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} x_i x_k$ nur aus zwei definiten quadratischen Formen zusammensetzt, nämlich wo einmal $D_{ik} = 0$ und das andere Mal $R_{ik} = 0$ ist, können fast wörtlich dieselben Überlegungen angestellt werden. Der Umstand, daß für die L_{ik} Einschränkungen wie (6a), (6b) nicht gelten, spielt für den Charakter der Widerstandsfunktion, d. h. für ihre Nullstellen und Pole [s. die Ungleichungen (10) und (11)] keine Rolle. Wir begnügen uns damit, die Resultate anzugeben.

Das Netz enthalte also erstens nur Widerstände, Selbstinduktionen und gegenseitige Induktionen. Dann gilt der

Satz II: Jeder durch ein Netz von n Freiheitsgeraden aus Ohmschen Widerständen, Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen gebildete Widerstand hat bei den Bedingungen (10) und (11) die Form

$$\mathfrak{R} = \frac{a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n}{b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \ldots + b_n} = \frac{H(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_3)(\lambda+\lambda_5)\ldots(\lambda+\lambda_{2n-1})}{(\lambda+\lambda_2)(\lambda+\lambda_4)\ldots(\lambda+\lambda_{2n-2})} \tag{22}$$

mit Einschluß der Grenzfälle $\lambda_1 \to 0$, $\lambda_{2n-1} \to \infty$ (wobei $\lim H\lambda_{2n-1}$ endlich). Er läßt sich stets durch jede der Schaltungen Bild 10, die keine gegenseitige Induktion enthalten und jede Kombination dieser Schaltungen ersetzen. Bei Kombinationen oder in den Grenzfällen müssen die Grenzwerte $R = 0$, $L = 0$ zugelassen werden.

Bild 10a entspricht der Partialbruchzerlegung

$$\mathfrak{G} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h_{2\nu-1}}{\lambda + \lambda_{2\nu-1}} \tag{23}$$

und es ist

$$R_\nu = \frac{\lambda_{2\nu-1}}{h_{2\nu-1}}, \quad L_\nu = \frac{1}{h_{2\nu-1}};$$

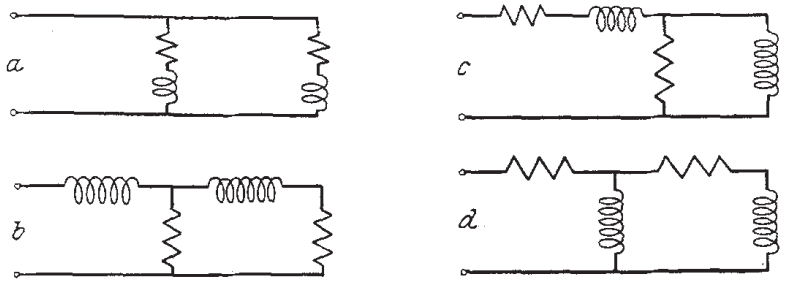

Bild 11. Die den Widerstand eines beliebigen aus Ohmschen Widerständen, Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen bestehenden zweimaschigen Netzes verwirklichenden Schaltungen ohne überflüssige Elemente.

Bild 10b der Kettenbruchentwicklung

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{|L_1 \lambda} + \frac{1}{|G_2} + \frac{1}{|L_3 \lambda} + \ldots + \frac{1}{|G_{2n}} \tag{24}$$

und es ist $R_{2\nu} = \frac{1}{G_{2\nu}}$; Bild 10c der Partialbruchzerlegung

$$\mathfrak{R} = R_0 + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{m_{2\nu}}{z + z_{2\nu}} \left(z = \frac{1}{\lambda},\ z_0 = 0,\ z_{2\nu} = \frac{1}{\lambda_{2\nu}} (\nu = 1, 2, 3 \ldots n-1) \right) \tag{25}$$

und es ist

$$L_\nu = m_{2\nu} (\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1), \quad R_\nu = \frac{m_{2\nu}}{z_{2\nu}} (\nu = 1, 2, \ldots n-1);$$

Bild 10d endlich entspricht der Kettenbruchentwicklung

$$\mathfrak{R} = R_0 + \frac{1}{|M_1 z} + \frac{1}{|R_2} + \frac{1}{|M_3 z} + \ldots + \frac{1}{|M_{2n-1} z} \tag{26}$$

und es ist

$$L_{2\nu-1} = \frac{1}{M_{2\nu-1}}.$$

Anfangs- oder Endelement der angeführten Schaltungen verschwinden wieder nur dann, wenn einer der beiden oder beide Grenzfälle $\lambda_1 \to 0$, $\lambda_{2n-1} \to \infty$ vorliegen. Alle übrigen Elemente sind positiv, wenn erforderlichenfalls die Zahl der Freiheitsgrade der Schaltung verringert wird.

Ferner gilt analog zu dem Satz Ia der

Satz IIa: Jeder durch ein zweimaschiges Netz aus Ohmschen Widerständen, Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen gebildete Widerstand hat die Form

$$\mathfrak{R} = \frac{a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2}{b_1 \lambda + b_2} \tag{27}$$

und läßt sich durch jede der Schaltungen Bild 11 darstellen. Bild 11 liefert die einzigen Schaltungen, welche dies leisten und keine überflüssigen Elemente enthalten.

Der letzte Teil des Satzes IIa gilt auch bei Zulassung von gegenseitiger Induktion. Bei vorhandener gegenseitiger Induktion ist nämlich stets ein Element in der Schaltung überflüssig, da ja wegen $a_2 \neq 0$ zwei Ohmsche Widerstände in der Schaltung vorkommen müssen.

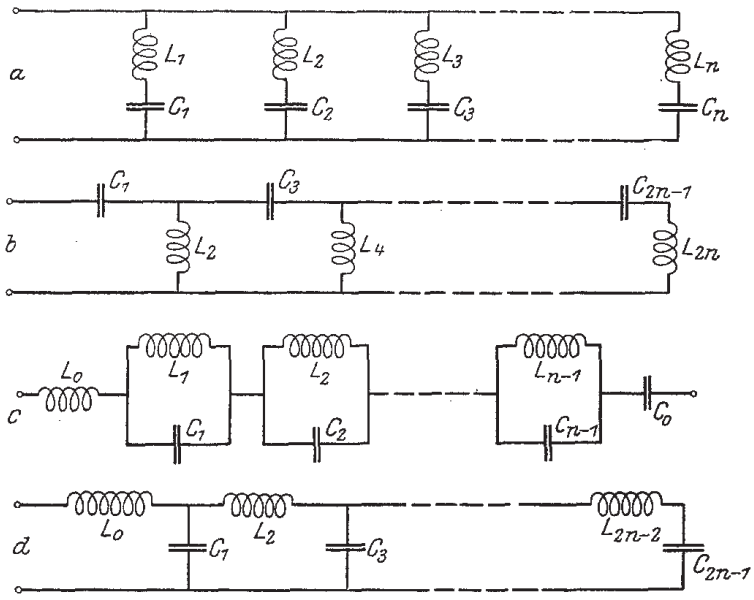

Bild 12. Schaltungen, die den Widerstand eines beliebigen aus Kapazitäten, Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen bestehenden n-maschigen Netzes verwirklichen.

Nehmen wir weiterhin $R_{ik} = 0$ an, so ergibt sich der

Satz III: Jeder durch ein Netz von n Freiheitsgraden aus Kapazitäten, Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen gebildete Widerstand hat die Form

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \frac{a_0 \lambda^{2n} + a_2 \lambda^{2n-2} + a_4 \lambda^{2n-4} + \ldots + a_{2n}}{b_1 \lambda^{2n-1} + b_3 \lambda^{2n-3} + \ldots + b_{2n-1} \lambda} \\ &= \frac{H \cdot (x + x_1)(x + x_2)(x + x_5) \ldots (x + x_{2n-1})}{\lambda \cdot (x + x_2)(x + x_4) \ldots (x + x_{2n-2})} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

mit Einschluß der Grenzfälle $x_1 \to 0$, $x_{2n-1} \to \infty$ (wobei $\lim H x_{2n-1}$ endlich). Darin ist $x = \lambda^2$ und die x_ν genügen den Relationen (10) und (11). Der Widerstand (28) läßt sich stets durch jede der Schaltungen Bild 12, die keine gegenseitige Induktion enthalten und durch jede Kombination dieser Schaltungen darstellen. Bei Kombinationen oder in Grenzfällen müssen die Grenzwerte $C = \infty$, $L = 0$ zugelassen werden[11]).

Bild 12a entspricht der Partialbruchzerlegung

$$\lambda \cdot \mathfrak{G} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{r_{2\nu-1}}{y + y_{2\nu-1}} \quad \left(y = \frac{1}{x} = \frac{1}{\lambda^2},\ y_{2\nu-1} = \frac{1}{x_{2\nu-1}}\right), \tag{29}$$

und es ist

$$L_\nu = \frac{y_{2\nu-1}}{r_{2\nu-1}},\ C_\nu = r_{2\nu-1};$$

Bild 12b der Kettenbruchentwicklung

$$\lambda\,\mathfrak{G} = \frac{1}{|D_1 y} + \frac{1}{|M_2} + \frac{1}{|D_3 y} + \ldots + \frac{1}{|M_{2n}}, \tag{30}$$

und es ist

$$C_{2\nu-1} = \frac{1}{D_{2\nu-1}},\ L_{2\nu} = \frac{1}{M_{2\nu}};$$

Bild 12c der Partialbruchzerlegung

$$\frac{\mathfrak{R}}{\lambda} = L_0 + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{s_{2\nu}}{x + x_{2\nu}} \quad (x_0 = 0), \tag{31}$$

und es ist

$$C_\nu = \frac{1}{s_{2\nu}} \quad (\nu = 0, 1, \ldots n-1),\ L_\nu = \frac{s_{2\nu}}{x_{2\nu}} \quad (\nu = 1,2, \ldots n-1);$$

Bild 12d endlich der Kettenbruchentwicklung

$$\frac{\mathfrak{R}}{\lambda} = L_0 + \frac{1}{|C_1 x} + \frac{1}{|L_2} + \frac{1}{|C_3 x} + \ldots + \frac{1}{|C_{2n-1} x}. \tag{32}$$

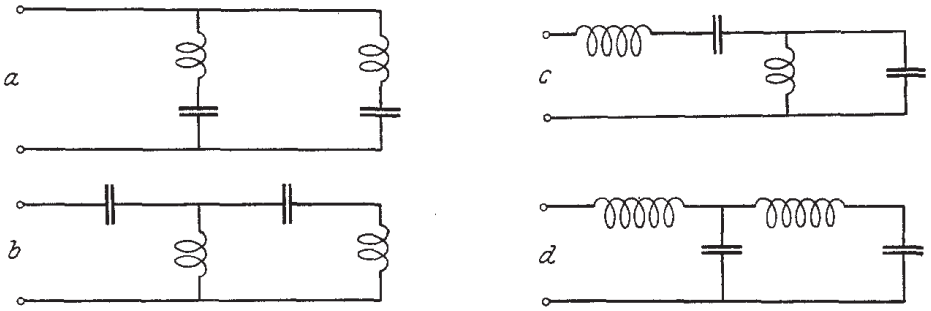

Bild 13. Die den Widerstand eines beliebigen, aus Kapazitäten, Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen bestehenden zweimaschigen Netzes verwirklichenden Schaltungen ohne überflüssige Elemente.

Durch Differentiation von (31) nach $\omega^2 = -x$ folgt, daß $\frac{\mathfrak{R}}{i\omega}$ mit wachsender Frequenz ω von den Polen abgesehen stets zunimmt. Auch bei den Schaltungen Bild 12 fallen nur das erste oder letzte Element oder beide Randelemente fort, wenn Grenzfälle ($x_1 = 0$, $x_{2n-1} = \infty$) vorliegen. Treten untereinander gleiche x_ν auf, so verringert sich die Zahl der Maschen der Schaltung. Ferner gilt der

Satz IIIa: Jeder durch ein zweimaschiges Netz aus Kapazitäten, Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen gebildete Widerstand hat die Form

$$\mathfrak{R} = \frac{a_0 \cdot \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_4}{b_1 \lambda^3 + b_3 \lambda} \tag{33}$$

und läßt sich durch jede der Schaltungen Bild 13 darstellen. Bild 13 liefert die einzigen Schaltungen, welche dies leisten und keine überflüssigen Elemente enthalten[12]).

Wieder gilt der letzte Teil des Satzes IIIa auch bei Zulassung von gegenseitiger Induktion.

4. Die Bedingungen für die Realisierbarkeit eines Widerstandes.

Netze mit einer endlichen Maschenzahl ergaben als realisierbare rationale Funktionen der Frequenz (9), (22) und (28). Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier wieder auf den Fall, daß diese Funktionen in gekürzter Form geschrieben sind. Als notwendige und hinreichende Bedingungen für die Realisierbarkeit erkannten wir (10) und (11), worin im Fall (28) λ durch $x = \lambda^2$ zu ersetzen ist. Diese Bedingungen lassen sich auch rational in den Koeffizienten a_ν, b_ν von (9), (22) und (28) ausdrücken. Es genügt offenbar, dies z. B. für (22) auszuführen. Die Bedingungen, denen die Koeffizienten von (9) und (28) genügen müssen, gehen aus jenen für (22) einfach dadurch hervor, daß man die Koeffizienten

$$a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots a_n;\quad b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots b_n$$

durch

$$a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2} \ldots a_{2n};\quad b_n,\ b_{n+1},\ b_{n+2} \ldots b_{2n-1}$$

bzw.

$$a_0,\ a_2,\ a_4, \ldots a_{2n};\quad b_1,\ b_3\ b_5 \ldots b_{2n-1}$$

ersetzt. Da in (22) $a_0 \neq 0$ ist, darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a_0 > 0$ vorausgesetzt werden, was wir tun wollen. Die in (10) enthaltene Bedingung, daß Nullstellen und Pole von (22) sämtlich reell und verschieden sind und die Nullstellen durch die Pole getrennt werden, zusammen mit (11), kann nach Hurwitz (Lit. 20) in folgender Weise formuliert werden. Es muß jede zweite Hauptunterdeterminante (durch Umrahmung hervorgehoben) der Determinante

$$\begin{array}{|cc|cc|cc|ccc|}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & . & . & . \\
0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & . & . & . \\
\hline
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & . & . & . \\
0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & . & . & . \\
\hline
0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array} \qquad (53)$$

bis zur 2 n-ten positiv sein. Wenn wir hierzu diejenigen Ungleichungen, zwischen den a_ν hinzufügen, die ausdrücken, daß die Nullstellen von (22) negativ reellen Teil besitzen, so haben wir ein System von Bedingungen, das mit (10) und (11) gleichwertig ist und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit der Funktion (22) als Widerstand angibt. Den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Wurzeln einer Gleichung

$$g(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \qquad (54)$$

mit reellen Koeffizienten sämtlich negativ reellen Teil besitzen, hat Hurwitz in derselben eben zitierten Arbeit eine einfache Form gegeben. Wir werden auf sie noch bei der Betrachtung derjenigen Funktionen des Frequenzparameters λ zurückkommen, die als Widerstände von Netzen auftreten, welche sowohl Selbstinduktion, wie Kapazität, wie auch Ohmsche Widerstände enthalten. Hurwitz zeigt in jener Arbeit zunächst, daß, wenn man

$$i^n g(-i\omega) = U + iV \qquad (\omega,\ U,\ V \text{ reell}) \qquad (55)$$

setzt, in $\frac{U}{V}$ genau wie in (22) Zähler und Nenner nur reelle verschiedene Wurzeln besitzen, diese einander trennen und außerdem der höchste Koeffizient in U dasselbe Vorzeichen wie der in V hat, und umgekehrt, daß g (54) nur Wurzeln mit negativ reellem Teil besitzt, wenn dies der Fall ist. Daher kann man diese Bedingungen dadurch ausdrücken, daß n Determinanten (53) positiv sein müssen. Wegen der speziellen Werte der a_ν, b_ν in unserem Fall gelangt man so zu den „Hurwitzschen Bedingungen“[26]), falls $a_0 > 0$ angenommen wird:

Damit (54) nur Wurzeln mit negativ reellem Teil besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die n ersten Hauptunterdeterminanten der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & . & . & . \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & . & . & . \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & . & . & . \\ a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} \tag{56}$$

positiv sind.

Diese Bedingungen enthalten als notwendige Folge die Ungleichungen $a_\nu > 0$. So erhält man als Ergänzung zu den Sätzen I, II, III:

Satz IV: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit eines Widerstandes von der Frequenzabhängigkeit (22) durch ein Netz aus Selbstinduktionen, gegenseitigen Induktionen und Kapazitäten werden durch die 2n Ungleichungen (53) und (56) gegeben. Die entsprechenden Bedingungen für (9) und (28) gewinnt man hieraus, indem man

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n; \quad b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$$

durch

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_{2n}; \quad b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots b_{2n-1}$$

bzw.

$$a_0, a_2, a_4, \ldots a_{2n}; \quad b_1, b_3, b_5, \ldots b_{2n-1}$$

ersetzt.

Aus den Ungleichungen des Satzes IV folgt, daß sämtliche Koeffizienten von $\mathfrak{R}$ positiv sind. Haben wir es speziell mit dem Fall $n = 2$ zu tun, so reduzieren sich die Hurwitzschen Ungleichungen (56) auf $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, und es ergibt sich der

Satz IVa: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit eines Widerstandes von der Frequenzabhängigkeit (27) durch ein zweimaschiges Netz aus Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen und Ohmschen Widerständen werden bei der Annahme $a_0 > 0$, durch die Ungleichungen

$$a_1 > 0, \; a_2 > 0 \tag{57}$$

und

$$b_1 > 0, \; -a_2 b_1^2 + a_1 b_1 b_2 - a_0 b_1^2 > 0 \tag{58}$$

gegeben. Die entsprechenden Ungleichungen für (21) und (33) ergeben sich hieraus, indem man

$$a_0, a_1, a_2; \quad b_1, b_2$$

durch

$$a_2, a_3, a_4; \quad b_2, b_3$$

bzw.

$$a_0, a_2, a_4; \quad b_1, b_3$$

ersetzt.

Die physikalische Notwendigkeit der Bedingungen (58) läßt sich unmittelbar einsehen, wenn man die a_i und b_i in (27) durch die Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen L_{ik} sowie die Ohmschen Widerstände R_{ik} des zweimaschigen Netzes ausdrückt. Man erhält so die offenbar physikalisch notwendigen Ungleichungen:

$$L_{22} > 0, \; (L_{12} R_{22} - L_{22} R_{12})^2 > 0. \tag{58a}$$

Ganz entsprechendes gilt für die Fälle (21) und (33). In Satz IV a ist angenommen, daß sich die Widerstände (27) bzw. (21) oder (33) nicht schon durch ein einmaschiges Netz verwirklichen lassen, daß sie also in gekürzter Form gegeben sind.

Die hier formulierten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit eines Widerstandes lassen sich noch in anderer Gestalt schreiben, die eine Verallgemeinerung auf unendliche Netze gestattet, welche nichtrationalen Funktionen entsprechen.

Die Kettenbrüche (17), (24) und (30) sind in äquivalenter Form geschrieben von der Art

$$\frac{\alpha_1|}{|u} + \frac{\alpha_2|}{|1} + \frac{\alpha_3|}{|u} + \ldots + \frac{\alpha_{2n}|}{|1}$$

mit positiven α_ν, und ihre Entwicklung nach fallenden Potenzen von u möge

$$\frac{c_0}{u} + \frac{c_1}{u^2} + \frac{c_2}{u^3} + \ldots$$

lauten. Die Funktionen (9), (22), (28) lassen sich nach den Sätzen I, II, III dann und nur dann als Widerstände von Netzen mit zwei Widerstandsarten verwirklichen, wenn die Kettenbruchentwicklungen (17) bzw. (24), (30) zu positiven α_ν führen. Nun besteht zwischen den α_ν und den c_ν der folgende Zusammenhang (vgl. Lit. 23, S. 304):

$$\alpha_1 = \varphi_1, \quad \alpha_{2\nu} = -\frac{\psi_{\nu+1}\varphi_{\nu-1}}{\varphi_\nu \psi_\nu}, \quad \alpha_{2\nu+1} = -\frac{\varphi_{\nu+1}\psi_\nu}{\psi_{\nu+1}\varphi_\nu}, \tag{59}$$

worin

$$\varphi_0 = 1, \quad \psi_1 = 1$$

$$\varphi_\nu = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{\nu-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_\nu \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{\nu-1} & c_\nu & \ldots & c_{2\nu-2} \end{vmatrix}, \quad \psi_\nu = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{\nu-1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_\nu \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{\nu-1} & c_\nu & \ldots & c_{2\nu-3} \end{vmatrix}$$

$(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ $\qquad$ $(\nu = 2, 3, 4, \ldots)$.

Man schließt hieraus sofort, daß

$$\varphi_\nu > 0 \; (\nu = 1, 2, 3, \ldots n) \tag{60}$$

und

$$\psi_{2\nu} < 0, \; \psi_{2\nu-1} > 0 \; (\nu = 2, 3, 4, \ldots n+1) \tag{61}$$

zu (53) und (56) äquivalente notwendige und hinreichende Bedingungen sind. Nach Hurwitz (Lit. 19) sind speziell die Ungleichungen (60) mit (53) gleichbedeutend. (60) gibt also wie (53) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß bei einer gebrochenen rationalen Funktion von u mit einem Zähler vom $(n-1)$-ten und Nenner vom n-ten Grade Nullstellen und Pole sämtlich reell sind und einander trennen und der Koeffizient der höchsten Potenz im Zähler und Nenner gleiches Zeichen hat [Satz von Jacobi und Borchardt][27]).

Kapitel III.

Netze mit Selbstinduktionen, gegenseitigen Induktionen, Ohmschen Widerständen und Kapazitäten[1]).

5. Zweimaschige Netze: Notwendige Bedingungen.

Der allgemeine Ausdruck (8) für den Widerstand eines n-maschigen Netzes reduziert sich für $n = 2$ auf

[1]) Der Abschnitt 8 „Netze mit einer beliebigen Zahl von Freiheitsgraden: Notwendige Bedingungen“ und der Abschnitt 9 „Netze mit einer beliebigen Zahl von Freiheitsgraden: Ansatz zur Lösung“ der Dissertation sind hier fortgelassen.

$$R = \frac{a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4}{b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda}. \tag{62}$$

Der Zusammenhang zwischen den a_i, b_i und den R_{ik}, D_{ik}, L_{ik} ergibt sich daraus, daß bei den Bezeichnungen des ersten Kapitels $\mathfrak{R} = \frac{a}{\lambda a_{11}}$ sein muß. Man erhält:

$$L_{11} L_{22} - L_{12}^2 = a_0 k^2, \tag{63}$$
$$L_{11} R_{22} + L_{22} R_{11} - 2 L_{12} R_{12} = a_1 k^2, \tag{64}$$
$$L_{11} D_{22} + L_{22} D_{11} - 2 L_{12} D_{12} = a_2 k^2 - r = c k^2, \tag{65}$$
$$R_{11} D_{22} + R_{22} D_{11} - 2 R_{12} D_{12} = a_3 k^2, \tag{66}$$
$$D_{11} D_{22} - D_{12}^2 = a_4 k^2, \tag{67}$$
$$L_{22} = b_1 k^2, \tag{68}$$
$$R_{22} = b_2 k^2, \tag{69}$$
$$D_{22} = b_3 k^2 \tag{70}$$

und wir setzen noch

$$r = R_{11} R_{22} - R_{12}^2 = \delta k^2, \tag{71}$$

so daß

$$c = a_2 - \delta.$$

Die nun in Angriff zu nehmende Aufgabe besteht darin, erstens die Bedingungen zu bestimmen, unter denen zu gegebenen a_i, b_i sich ein reelles von Null verschiedenes k und den physikalisch notwendigen Einschränkungen (5), (6) genügende L_{ik}, R_{ik}, D_{ik} bestimmen lassen, und zweitens gegebenenfalls physikalisch mögliche Lösungen der Gleichungen (63) bis (70) aufzustellen. Wir befassen uns hier vorwiegend mit der ersten Aufgabe. Die zweite Aufgabe macht offenbar keine prinzipiellen Schwierigkeiten und ist von Foster, wie schon erwähnt, in sehr vollständiger und für die Praxis brauchbarer Weise gelöst. Wir geben nur eine Lösungsmethode der Gleichungen (63) bis (70) im Prinzip an, und zwar in einer Form, die einer Verallgemeinerung auf $n > 2$ fähig ist.

Die neun Gleichungen (63) bis (71) bestimmen außer k^2 und δ nur sieben Widerstandselemente, entsprechend dem Umstand, daß der Ausdruck (62) sieben wesentliche Konstanten enthält. Die rechten Seiten der Gleichungen (63), (64), (66) bis (70) sind, vom Faktor k^2 abgesehen, die Koeffizienten der darzustellenden Funktion (62). Setzt man $L_{ik} = 0$ oder $R_{ik} = 0$ oder $D_{ik} = 0$, so verschwinden eine gewisse Anzahl von den a_i, b_i, δ, wobei a_2 durch c ersetzt ist; alle übrigen bleiben aber ungeändert. Nun sind aber auch die rechten Seiten von (71) und (65) bis auf den Faktor k^2 durch die Koeffizienten von (62) bestimmt. Wie wir bald sehen werden, genügt nämlich δ einer quadratischen Gleichung in den a_i, b_i[29]), die man durch Elimination der übrigen noch zu bestimmenden Größen aus den Gleichungen (63) bis (71) gewinnen kann.

Um notwendige Bedingungen für die Auflösbarkeit unseres Gleichungssystems zu erhalten, setzen wir statt (3)

$$A_{ik} = \mu L_{ik} + (\lambda R_{ik} + D_{ik}).$$

Dann wird

$$\frac{a(\mu)}{a_{11}(\mu)} = \frac{a_0 \mu^2 + (a_1 \lambda + c) \mu + (\delta \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4)}{b_1 \mu + (b_2 \lambda + b_3)}, \tag{72}$$

woraus sich (62) ergibt, wenn man $\mu = \lambda^2$ setzt. Wir können nun genau wie in Abschnitt 2 daraus, daß $\sum_{i,k=1}^{n} L_{ik} x_i x_k$ positiv definit ist, schließen, daß die Nullstellen und Pole der rationalen Funktion von μ (72) sämtlich reell sind und einander trennen (oder im Grenzfall übereinstimmen). Die Vorzeichen der Koeffizienten der höchsten Potenzen von μ im Nenner und Zähler stimmen überein. Dies gilt für

alle reellen λ. Deshalb muß nach (58) wegen unserer Festsetzung $a_0 > 0$ notwendig $b_1 > 0$, und

$$-a_0(b_2\lambda + b_3)^2 + (a_1\lambda + c)\,b_1(b_2\lambda + b_3) - (\delta\lambda^2 + a_3\lambda + a_4)\,b_1^2 \geq 0$$

sein, letzteres für alle reellen λ. Ordnet man nach λ, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}(-\delta b_1^2 + a_1 b_1 b_2 - a_0 b_2^2)\,\lambda^2 - (a_3 b_1^2 - c\,b_1 b_2 - a_1 b_1 b_3 + 2\,a_0 b_2 b_3)\,\lambda + \\ + (-a_0 b_3^2 + c\,b_3 b_1 - a_4 b_1^2) \geq 0.\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

Daher ist notwendig:

$$T_2^2 = -a_0 b_3^2 + c\,b_3 b_1 - a_4 b_1^2 \geq 0, \quad (74)$$

$$T_3^2 = -\delta b_1^2 + a_1 b_1 b_2 - a_0 b_2^2 \geq 0, \quad (75)$$

$$4\,T_2^2 T_3^2 - (a_3 b_1^2 - c\,b_1 b_2 - a_1 b_1 b_3 + 2\,a_0 b_2 b_3)^2 \geq 0. \quad (76)$$

Bevorzugen wir nicht L_{ik}, sondern R_{ik} oder D_{ik}, so erhalten wir zwei zu (73) analoge Beziehungen. Es erübrigt sich aber, diese abzuleiten, da das Gleichungssystem (63) bis (71) in den L_{ik}, R_{ik}, D_{ik} symmetrisch ist und daher jede aus den Ungleichungen (5) gezogene Folgerung für die Koeffizienten a_0, a_1, c, a_3, a_4, δ, b_1, b_2, b_3 gültig bleibt, wenn man eine der Vertauschungen

$$b_2 \text{ und } b_3, \quad \delta \text{ und } a_4, \quad a_1 \text{ und } c, \quad (77\,a)$$

$$b_3 \text{ und } b_1, \quad a_4 \text{ und } a_0, \quad a_3 \text{ und } a_1, \quad (77\,b)$$

$$b_1 \text{ und } b_2, \quad a_0 \text{ und } \delta, \quad c \text{ und } a_3 \quad (77\,c)$$

vornimmt. So folgt noch die zu (74) und (75) analoge Ungleichung

$$T_1^2 = -a_4 b_2^2 + a_3 b_2 b_3 - \delta b_3^2 \geq 0 \quad (78)$$

und zwei (76) entsprechende Beziehungen. Die Notwendigkeit der Bedingungen (78), (74) und (75) ergibt sich unmittelbar aus Satz IVa, wenn man nacheinander $L_{ik} = 0$, $R_{ik} = 0$, $D_{ik} = 0$ setzt, da, wie schon erwähnt, bei dieser Operation die nicht zur Identität werdenden Gleichungen des Systems (63) bis (71) ungeändert bleiben. Die physikalische Bedeutung der gewonnenen Bedingungen für die Koeffizienten von (62) erkennt man, wenn man ihre Werte aus (63) bis (71) einsetzt. Es wird nämlich [vgl. (58a)]:

$$\left.\begin{aligned}k^6 T_1^2 &= (R_{12} D_{22} - R_{22} D_{12})^2, \\ k^6 T_2^2 &= (D_{12} L_{22} - D_{22} L_{12})^2, \\ k^6 T_3^2 &= (L_{12} R_{22} - L_{22} R_{12})^2.\end{aligned}\right\} \quad (79)$$

Wegen der Indentität

$$L_{22}(R_{12} D_{22} - R_{22} D_{12}) + R_{22}(D_{12} L_{22} - D_{22} L_{12}) + D_{22}(L_{12} R_{22} - L_{22} R_{12}) = 0 \quad (80)$$

besteht bei geeigneter Vorzeichenwahl zwischen T_1, T_2, T_3 die Beziehung

$$b_1 T_1 + b_2 T_2 + b_3 T_3 = 0. \quad (80\,a)$$

Zwei der Ungleichungen (74), (75), (78) ziehen hiernach die dritte nach sich, weil b_1, b_2, b_3 reell sind. Durch die Wahl des Vorzeichens einer der drei Größen T_1, T_2, T_3 ist das Vorzeichen der beiden anderen mitbestimmt, wenn, wie wir hierdurch festsetzen, (80a) gelten soll. Dann sind also $T_2 \cdot T_3$, $T_3 \cdot T$, $T_1 \cdot T_2$ mit dem Vorzeichen bestimmt.

Setzt man ebenso in den Klammerausdruck von (76) die Werte aus (63) bis (71) ein, so wird

$$\left.\begin{aligned}k^6 \cdot (a_3 b_1^2 - c\,b_1 b_2 - a_1 b_1 b_3 + 2\,a_0 b_2 b_3) = \\ = 2\,(D_{12} L_{22} - D_{22} L_{12})(L_{12} R_{22} - L_{22} R_{12}) = 2\,k^6 T_2 \cdot T_3\end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Daher gilt in (76) nur das Gleichheitszeichen, so daß (76) sich als quadratische Gleichung für δ auffassen läßt. Führen wir die abkürzenden Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned}4 b_1 b_3 - b_2^2 &= \Delta_1 \quad \text{[Diskriminante des Nenners von (62)]} \\ a_1 b_1 - a_0 b_2 &= V_1 \\ a_2 b_2 - a_1 b_3 - a_3 b_1 &= V_2 \\ a_3 b_3 - a_4 b_2 &= V_3 \\ 4 V_1 V_3 - V_2^2 &= \Delta_2 \\ -a_0 b_3^2 + a_2 b_3 b_1 - a_4 b_1^2 &= W\end{aligned}\right\} \quad (82)$$

ein, so lautet die Gleichung für δ nach Fortheben des gemeinsamen Faktors b_2^2

$$\Delta_1 \delta^2 + 2 (b_2 V_2 - 2 W) \delta + \Delta_2 = 0. \tag{76a}$$

Gleichung (80) gestattet jede der Vertauschungen (77). Daher führen die beiden zu (76) analogen Beziehungen auf dieselbe Gleichung (76a). Unter Benutzung der Vertauschungen (77) folgt aus (81) noch

$$\left.\begin{aligned} 2 T_2 T_3 &= a_3 b_1^2 - c b_1 b_2 - a_1 b_1 b_3 + 2 a_0 b_2 b_3 \\ 2 T_3 T_1 &= - a_3 b_2 b_1 + c b_2^2 - a_1 b_2 b_3 + 2 \delta b_3 b_1 \\ 2 T_1 T_2 &= - a_3 b_3 b_1 - c b_3 b_2 + a_1 b_3^2 + 2 a_4 b_1 b_2 \end{aligned}\right\} \tag{81a}$$

Nun sollen noch aus der aus (73) durch die Vertauschung (77c) hervorgehenden Bedingung

$$T_3^2 x_1^2 - 2 T_3 T_1 x_1 x_2 + T_1^2 x_2^2 \geq 0 \tag{73a}$$

für alle reellen x_1, x_2, zwei wichtige Folgerungen gezogen werden. Addiert man zu (73a) den Ausdruck

$$\delta \cdot [b_1^2 x_1^2 - (b_2^2 - 2 b_1 b_3) x_1 x_2 + b_3^2 x_2^2],$$

der für $\Delta_1 > 0$ positiv definit ist, so folgt

$$V_1 x_1^2 - V_2 x_1 x_2 + V_3 x_2^2 > 0, \tag{83}$$

außer wenn $x_1 = x_2 = 0$.

Daher ist notwendig

$$V_1 > 0 \tag{84a}$$

$$V_3 > 0 \tag{84b}$$

$$\Delta_2 = 4 V_1 V_3 - V_2^2 > 0, \tag{84c}$$

wenn $\Delta_1 > 0$, d. h., wenn der Nenner komplexe Wurzeln hat.

Ist dagegen $\Delta_1 \leq 0$, so ist sicher $b_2^2 > 2 b_1 b_3$ und

$$\delta [b_1^2 x_1^2 + (b_2^2 - 2 b_1 b_3) x_1 x_2 + b_3^2 x_2^2] > 0$$

für $x_1 \cdot x_2 \geq 0$ außer $x_1 = x_2 = 0$.

Setzt man in (73a) $\frac{-x_1}{x_2}$ statt $\frac{x_1}{x_2}$, so folgt durch Addition mit dieser Ungleichung jetzt

$$V_1 x_1^2 + V_2 x_1 x_2 + V_3 x_2^2 > 0 \tag{85}$$

für alle $x_1 \cdot x_2 \geq 0$ außer für $x_1 = x_2 = 0$.

(85) ist also in jedem Fall richtig. Die physikalische Bedeutung wird klar, wenn man $\frac{x_1}{x_2}$ durch ω^2 ersetzt. Dann unterscheidet sich nämlich (85) von dem reellen Teil von (62) für $\lambda = i\omega$:

$$R_e [\Re (i\omega)] = \frac{1}{2} [\Re (i\omega) + \Re (-i\omega)]$$

nur um einen positiven Faktor. Dieser reelle Teil muß aber wegen der Energieverzehrung in den Ohmschen Widerständen nach der Voraussetzung (5b) für alle Frequenzen (auch in der Grenze für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$) positiv sein[30]). In jedem Falle folgt somit (84a) und (84b). Diese Ungleichungen erhält man auch aus der notwendigen Bedingung $R_e [\Re (i\omega)] > 0$, wenn einmal $L_{ik} = 0$, das andere Mal $D_{ik} = 0$ gesetzt wird. Ferner folgen sie aus (75) und (78) wegen $\delta > 0$. Wenn $\Delta_1 \leq 0$ ist [d. h. wenn der Nenner von (62) reelle Wurzeln besitzt] so muß entweder die Ungleichung (84c) oder

$$V_2 \geq 0 \tag{86}$$

bestehen, wobei (84c) und (86) sich nicht gegenseitig ausschließen.

Weitere notwendige Bedingungen folgen daraus, daß nach den Voraussetzungen (5) Zähler und Nenner von $\frac{a}{a_{11}}$ in (7) nur Wurzeln mit negativ reellem Teil besitzen. Wegen des mathematischen Beweises vgl. z. B. Routh, Lit. 21, Kap. VII. Physikalisch sieht man es daran, daß jede freie Schwingung abklingen muß. Die Hur-

witzschen Kriterien (5c) dafür, daß (62) Nullstellen und Pole mit negativ reellem Teil besitzt, liefern außer $a_\nu > 0$, $b_\nu > 0$ noch die eine unabhängige Ungleichung

$$-a_4 a_1^2 + a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 > 0 \tag{87}$$

aus der noch

$$4 a_0 a_4 - a_2^2 < 0 \tag{87a}$$

folgt. Wir werden jetzt nachweisen, daß man aus den aus dem Energieprinzip ableitbaren Hurwitzschen Ungleichungen und (85) auf die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten von (62) im Grenzfall $R_{ik} = 0$, d. h. nach Satz IVa, auf $a_2 > 0$, $a_4 > 0$, $b_1 > 0$ und

$$W = -a_0 b_3^2 + a_2 b_3 b_1 - a_4 b_1^2 > 0 \tag{88}$$

schließen kann, oder, was dasselbe ist, darauf, daß im Grenzfall $R_{ik} = 0$ die Nullstellen und Pole von $\mathfrak{R}$ einander trennen und rein imaginär sein müssen (einschl. des Pols $\lambda = 0$). Dieser Schluß läßt sich auf beliebiges $n > 2$ verallgemeinern[1]).

Aus (85) und $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0$ erhält man wegen

$$b_3^2 V_1 + b_3 b_1 V_2 + b_1^2 V_3 = b_2 \cdot W \tag{89}$$

$W > 0$ und hieraus zusammen mit $a_4 > 0$ noch $a_2 > 0$, was zu beweisen war. Es genügt also schon, die Hurwitzschen Bedingungen für den Nenner von (62) allein zusammen mit $a_4 > 0$ vorauszusetzen. Im Fall (84c) kann man auch folgendermaßen schließen: (84c) wird erst recht richtig sein, wenn für b_2 derjenige Wert gesetzt wird, der Δ_2 zum Maximum macht. Dies ist

$$b_2 = \frac{(a_2 a_3 - 2 a_1 a_4) b_1 + (a_1 a_2 - 2 a_0 a_3) b_3}{a_2^2 - 4 a_0 a_4}. \tag{90}$$

Man erhält so

$$\left.\begin{aligned} &[(a_2 a_3 - 2 a_1 a_4) b_1 + (a_1 a_2 - 2 a_0 a_3) b_3]^2 - (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 \cdot (a_2^2 - 4 a_0 a_4) \\ &\quad = 4 (-a_4 a_1^2 + a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2) \cdot W > 0 \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

woraus wiederum die Behauptung folgt.

Die Bedingung $R_e[\mathfrak{R}(i\omega)] > 0$ und die Hurwitzschen Kriterien für die Nullstellen und Pole von $\lambda \mathfrak{R}$ sind nicht unabhängig voneinander. Wie sich zeigen läßt, folgen, wenn n einen beliebigen Wert hat, aus den Hurwitzschen Ungleichungen für die Nullstellen zusammen mit $R_e[\mathfrak{R}(i\omega)] > 0$ die Hurwitzschen Ungleichungen für die Pole, und umgekehrt aus den Hurwitzschen Ungleichungen für die Pole zusammen mit $R_e[\mathfrak{R}(i\omega)] > 0$ im wesentlichen die Hurwitzschen Ungleichungen für die Nullstellen. Hier soll für $n = 2$ ein Beweis gegeben werden.

Wegen der Identität

$$V_1 a_3^2 + V_2 a_3 a_1 + V_3 a_1^2 = b_2 (-a_4 a_1^2 + a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2) \tag{92}$$

folgen aus den Hurwitzschen Ungleichungen für den Zähler von (62) nach (85) $b_2 > 0$ und hieraus nach (84a) und (84b) $b_1 > 0$ und $b_3 > 0$, also die Hurwitzschen Ungleichungen für den Nenner von (62). Umgekehrt folgen aus den Hurwitzschen Ungleichungen für den Nenner und aus $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ nach (84a) und (84b) $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ und deshalb nach (92) und (85) die Bedingung (87) und hieraus schließlich $a_2 > 0$, also alle Hurwitzschen Ungleichungen für den Zähler.

6. Zweimaschige Netze: Lösung der Aufgabe und hinreichende Bedingungen.

Bei den Voraussetzungen, daß eine Wurzel $\delta > 0$ von (76a) existiert, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$, $b_2 > 0$ und (78) positiv ist, kann nach Satz Ia und IVa das Gleichungssystem (66), (67), (69), (70), (71) durch jede der Schaltungen Bild 8 gelöst werden, und zwar sind dies die einzigen Schaltungen ohne überflüssige Elemente, welche

[1]) Der betreffende Abschnitt 8 „Netze mit einer beliebigen Zahl von Freiheitsgraden: Notwendige Bedingungen" der Dissertation ist hier nicht abgedruckt.

das stets leisten. Nachdem so die R_{ik} und D_{ik} und damit k^2 in irgendeiner Weise festgelegt sind, werden durch die linearen Gleichungen (64), (65), (68) die L_{ik} eindeutig bestimmt, da die Determinante dieses Systems $2k^3T_1$ nicht verschwindet. Weil δ der Gleichung (76a) genügt, durch welche (63) berücksichtigt wird, muß jetzt (63) von selbst erfüllt sein, und in der Tat erhält man durch Einsetzen der berechneten Werte L_{ik} in (63) die Gleichung (76a). Die so berechneten L_{ik} sind reell, und wenn man noch die Voraussetzung $b_1>0$ hinzufügt, ist auch die Forderung (5a) erfüllt. Damit ist die Lösung des Gleichungssystems (63) bis (71) unter obigen Voraussetzungen einschließlich $b_1>0$ bewerkstelligt.

Als Beispiel diene die Schaltung Bild 8b. Durch Kettenbruchentwicklung nach (17) erhält man zunächst

$$C_1=\frac{b_3}{a_4},\quad R_2=\frac{V_3}{b_3^2},\quad C_3=\frac{b_3T_1^2}{V_3^2},\quad R_3=\frac{\delta V_3}{T_1^2},\quad k^2=\frac{V_3^2}{b_3^2T_1^2} \tag{93}$$

und dann aus den Gleichungen (64), (65), (68), wenn wir festsetzen, daß der Stromkreis von J_1 durch den Zweig 1 und den Zweig 2 gebildet wird, also

$$R_{11}=R_{12}=R_2,\quad R_{22}=R_2+R_3,$$

$$D_{11}=\frac{1}{C_1},\quad D_{12}=0,\quad D_{22}=\frac{1}{C_3}$$

wird,

$$L_{11}=\frac{c\,b_3-a_4\,b_1}{b_3^2},\quad L_{12}=-\frac{V_3\cdot(T_1T_2)}{b_3^2T_1^2},\quad L_{22}=\frac{b_1V_3^2}{b_3^2T_1^2}. \tag{94}$$

Jede gegenseitige Induktion wird, der Vereinbarung über die Stromrichtungen in Bild 2 entsprechend, dann positiv gezählt, wenn sie im gleichen Sinne wirkt wie eine Selbstinduktion im Zweig 2. Dann bestehen bei den Bezeichnungen von Bild 14 die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}L_{11}&=L_1+L_2+2M_{12}\\L_{12}&=L_2+M_{12}+M_{23}+M_{31},\\L_{22}&=L_2+L_3+2M_{23}.\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Die Verwirklichung gegebener Größen L_{11}, L_{12}, L_{22}, die der Bedingung (5a) genügen, ist also ohne überflüssige Elemente stets in drei Weisen möglich:

$$L_1=L_{11},\ L_3=L_{22},\ M_{31}=L_{12};\ L_2=M_{12}=M_{23}=0 \tag{96a}$$

$$L_2=L_{22},\ L_1=L_{11}+L_{22}-2L_{12},\ M_{12}=L_{12}-L_{22};\ L_3=M_{23}=M_{31}=0 \tag{96b}$$

$$L_3=L_{11}+L_{22}-2L_{12},\ L_2=L_{11},\ M_{23}=L_{12}-L_{11},\ L_1=M_{31}=M_{12}=0, \tag{96c}$$

von denen die erste die einfachste ist. Wegen

$$L_1L_2-M_{12}^2=L_{11}L_{22}-L_{12}^2=1>0,\ \text{bzw.}\ L_2L_3-M_{23}^2=1>0$$

wird auch in den beiden letzten Fällen die magnetische Energie bei jeder Stromverteilung in den Zweigen 1 und 2 bzw. 2 und 3 positiv, wie es ja auch sein muß, weil (5a) erfüllt ist. Dagegen können L_{11}, L_{12}, L_{22} durch

$$L_1=L_{11}-L_{12},\ L_2=L_{12},\ L_3=L_{22}-L_{12},\ M_{ik}=0,$$

nur dann verwirklicht werden, wenn $L_{12}\geq 0$, $L_{11}\geq L_{12}$, $L_{22}\geq L_{12}$ ist.

Aus (5a) folgt eben nur, daß bei allen den Strömen in den Zweigen 1, 2, 3, welche die Kirchhoffsche Bedingung in den Knotenpunkten erfüllen, die magnetische Energie positiv ausfällt.

Zu jeder Schaltung Bild 8 für die Ohmschen Widerstände und Kapazitäten gibt es also drei Schaltungsmöglichkeiten für die Selbstinduktion, so daß jeder Widerstand (62), dessen Koeffizienten den Bedingungen $a_3>0$, $a_4>0$, $b_1>0$, $b_2>0$ und $T_1^2>0$ genügen, für jede Wurzel $\delta>0$ der Gleichung (76a) durch zwölf verschiedene Schaltungen dargestellt werden kann. Die beiden nach Bild 8a entstehenden Schaltungen, in denen im Zweig 1 eine Selbstinduktion liegt, sind zwar der Anordnung der Elemente, aber nicht ihren zahlenmäßigen Werten nach identisch. Gemäß der Lösungsmethode drücken sich außer bei den aus Bild 8a hervorgehenden

Schaltungen die Schaltelemente rational durch die in (62) gegebenen Koeffizienten a_ν, b_ν und δ aus. In der beschriebenen Art erhält man stets Lösungen, da die hier gemachten Voraussetzungen nach Abschnitt 5 auch notwendig sind.

Eine besondere Betrachtung erfordert nur noch der Ausnahmefall $T_1 = 0$. Dieser Fall kann eintreten, wenn zwischen den Koeffizienten von (62) die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &2\,a_4 b_1 b_2 b_3 - a_3 b_1 b_3^2 - a_4 b_2^2 + a_2 b_2^2 b_3 - a_2 b_2 b_3^2 + a_1 b_3^2 \\ &\equiv (b_2^2 - 2\,b_1 b_3)\cdot V_3 - b_3^2 V_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (97)$$

besteht, die man durch Elimination von δ aus $T_1 = 0$ und (81a) gewinnt[31]). Die Gleichungen (66), (67), (69), (70), (71) gestatten dann keine Lösung nach Schaltung Bild 8, dagegen unendlich viele Lösungen, wenn Kapazitäten und Ohmsche Widerstände nach Schaltung Bild 14 verteilt sind, nämlich

$$C_1 = \frac{b_3}{a_4},\quad R_1 = \frac{\delta}{b_2},\quad C_3 = \frac{1}{b_3 k^2},\quad R_3 = b_2 k^2, \quad (98)$$

worin k jede von Null verschiedene reelle Zahl sein kann.

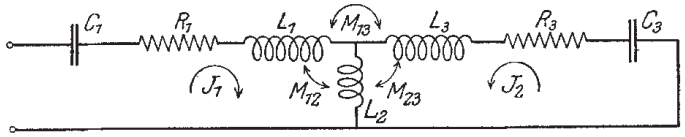

Bild 14. Schaltung, die für $M_{12} = L_3 = 0$ und für $M_{23} = L_1 = 0$ den Widerstand irgendeines zweimaschigen Netzes aus Ohmschen Widerständen, Kapazitäten, Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen im Ausnahmefall $T_1 = 0$ verwirklicht.

Die Gleichungen (64), (65), (68) werden linear abhängig. Denn es ist

$$\begin{aligned} &R_{22} D_{22}\cdot[a_1 D_{22} - c\,R_{22} + b_1 (R_{22} D_{11} - R_{11} D_{22})] \\ &= \frac{k^6}{b_1}\cdot(b_3^2 T_3^2 - b_2^2 T_2^2) + k^3 b_1 T_1\cdot(R_{12} D_{22} + R_{22} D_{12}) \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck verschwindet nach (80a). Die Lösung von (63), (64), (65), (68) lautet:

$$L_{11} = \frac{c\,b_3 - a_4 b_1}{b_3^2},\quad L_{12} = \frac{k\,T_3}{b_2},\quad L_{22} = b_1 k^2. \quad (99)$$

Gemäß (96a) läßt sich also (62), wenn (97) erfüllt ist, durch zwei nur durch gegenseitige Induktion gekoppelte Kreise darstellen. Speziell für $k = \frac{T_3}{b_1 b_2}$ wird $L_{12} = L_{22}$ und für $k = b_2 \frac{(c\,b_3 - a_4 b_1)}{b_3^2 T_3}$ wird $L_{12} = L_{11}$, so daß nach (96b) und (96c) hier auch Schaltungen mit nur sechs Elementen ohne gegenseitige Induktionen den Widerstand (62) realisieren.

Verschwindet außer T_1 noch einer der Ausdrücke T_2 und T_3, so verschwinden nach (80a) alle T_ν, und (73) wird identisch Null. Da die linke Seite von (73) die Resultante von Zähler und Nenner in (72) darstellt, so läßt sich (62) kürzen und schon durch ein einmaschiges Netz (Reihenschaltung von Selbstinduktion, Ohmschem Widerstand und Kapazität) verwirklichen. Mit den angegebenen zwölf Schaltungen sind alle Lösungen ohne überflüssige Elemente (d. h. mit nur sieben Elementen) erschöpft, die den ganzen Bereich der darstellbaren Widerstände von der Form (62) umfassen. Sie enthalten sämtlich gegenseitige Induktion. Die L_{ik} spielen gegenüber den R_{ik} und D_{ik} hier eine besondere Rolle, anders als in den Fällen, wo nur zwei Widerstandsarten im Netz vorkommen. Dies liegt daran, daß die L_{ik} im Gegensatz zu R_{ik} und D_{ik} nur der physikalischen Einschränkung (5a) unterworfen sind. Eine Lösung des Gleichungssystems (63) bis (71) ist zwar auch möglich, indem man zunächst (63), (65), (67), (68), (70) bzw. (63), (64), (68), (69), (71) durch eine der Schaltungen Bild 13 bzw. Bild 11 löst und zuletzt die

R_{ik} bzw. D_{ik} bestimmt. Unter den Voraussetzungen, daß eine Wurzel $\delta > 0$ von (76a) existiert und ferner

$$a_4 > 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ b_3 > 0,\ T_2^2 > 0^{32})$$

bzw.

$$a_1 > 0,\ a_4 > 0,\ b_1 > 0,\ b_3 > 0,\ T_3^2 > 0$$

ist, läßt sich analog wie früher schließen, daß die Schaltelemente den Bedingungen (5) genügen. Die darüber hinausgehenden physikalischen Einschränkungen für die R_{ik} und D_{ik} brauchen aber nicht erfüllt zu sein, so daß man in dieser Weise Schaltungen erhält, von denen jede nur einen Teilbereich der überhaupt darstellbaren Widerstände von der Form (62) überdeckt. Die Fälle $T_2 = 0$ oder $T_3 = 0$ lassen sich analog $T_1 = 0$ lösen, es existieren aber hier nur die beiden Lösungen, welche den dort zuletzt angegebenen entsprechen, und diese sind als Sonderfälle unter den zwölf den ganzen Bereich umfassenden Schaltungen enthalten. Mit zweimaschigen Netzen, welche nur einen Teilbereich der überhaupt durch zweimaschige Netze darstellbaren Widerstände umfassen, beschäftigen wir uns hier nicht weiter und verweisen diesbezüglich auf Foster (Lit. 9). Unser Resultat sprechen wir noch als Satz aus:

Satz V: Alle durch ein zweimaschiges Netz realisierbaren Widerstände lassen sich (für jedes mit den Bedingungen verträgliche $\delta > 0$) durch zwölf Schaltungen darstellen. Diese Schaltungen gehen aus denen von Bild 8 hervor, indem man in zwei Zweigen eine Selbstinduktion hinzufügt und beide Selbstinduktionen durch eine gegenseitige Induktion verknüpft. Zwei der Schaltungen (die aus Bild 8a entstehen) unterscheiden sich nicht durch die Anordnung, sondern nur durch die zahlenmäßigen Werte ihrer Elemente. Diese zwölf Schaltungen sind die einzigen, welche den ganzen Bereich der realisierbaren Widerstände überdecken. Ein Ausnahmefall kann nur vorliegen, wenn zwischen den Koeffizienten von (62) die Relation (97) besteht[33]).

Die für die Auflösbarkeit des Gleichungssystems (63) bis (71) hinreichenden Bedingungen

$$\delta > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ T_1^2 \geq 0 \qquad (100a)$$

wurden aus den physikalischen Forderungen (5a), (5b), (5c) als notwendig abgeleitet. Daher sind auch

$$\delta > 0,\ a_4 > 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ b_3 > 0,\ T_2^2 \geq 0 \qquad (100b)$$

oder

$$\delta > 0,\ a_1 > 0,\ a_4 > 0,\ b_1 > 0,\ b_3 > 0,\ T_3^2 \geq 0 \qquad (100c)$$

notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit unseres Problems. Einen Teil dieser Abhängigkeit der Ungleichungen (74), (75), (78) voneinander erkannten wir schon früher im Anschluß an die Relation (80a). In diesen notwendigen und hinreichenden Bedingungen kommt eine bevorzugte Stellung der L_{ik} nicht zum Ausdruck.

7. Zweimaschige Netze: Diskussion und Vereinfachung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen.

Nun soll die Bedeutung der aufgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingungen diskutiert und ihnen eine einfachere Form erteilt werden. Zunächst behandeln wir den Fall $\Delta_1 > 0$. Er liegt vor, wenn der Nenner von (62) komplexe Wurzeln hat, aber auch, wenn der Zähler nur komplexe Wurzeln hat, wie später gezeigt wird[34]), also jedenfalls immer dann, wenn die Ohmschen Widerstände gegenüber den Selbstinduktionen und Kapazitäten klein sind, wie es in den Anwendungen häufig vorkommt. Es wird bewiesen werden, daß die in diesem Fall

$\Delta_1 > 0$ notwendige Bedingung (83) zusammen mit $a_4 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ zugleich hinreichend ist.

Die Auflösung von (76a) liefert

$$\Delta_1 \cdot \delta = 2\,W - b_2 V_2 \pm 2\,\Delta, \tag{101}$$

worin

$$4\,\Delta^2 = (2\,W - b_2 V_2)^2 - \Delta_1 \Delta_2 \tag{102}$$

ist. Hierin bedeutet Δ^2 nichts anderes, als die Resultante von Zähler und Nenner in (62):

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{103}$$

Daher erhält man für Δ^2 auch, wenn man die Nullstellen und Pole von (62) mit α_1, α_2, α_3, α_4; β_2, β_3 bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 = a_0^2\, b_1^4\, (\alpha_1 - \beta_2)\,(\alpha_1 - \beta_3)\,(\alpha_2 - \beta_2)\,(\alpha_2 - \beta_3)\,(\alpha_3 - \beta_2)\,(\alpha_3 - \beta_3) \\ (\alpha_4 - \beta_2)\,(\alpha_4 - \beta_3) \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 = a_0^2\,(\alpha_1^2 b_1 + \alpha_1 b_2 + b_3)\,(\alpha_2^2 b_1 + \alpha_2 b_2 + b_3)\cdot \\ \cdot\,(\alpha_3^2 b_1 + \alpha_3 b_2 + b_3)\,(\alpha_4^2 b_1 + \alpha_4 b_2 + b_3). \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Wegen $\Delta_1 > 0$ muß hiernach auch im Fall reeller Nullstellen $\Delta^2 > 0$ ausfallen, so daß (101) reelle Lösungen liefert. Diese Lösungen sind wegen (83) aber auch beide positiv. Es kommt darauf an zu beweisen, daß $2\,W - b_2 V_2 > 0$ ist. Dies folgt aber aus der Identität

$$\left.\begin{aligned} b_2\,(2\,W - b_2 V_2) &= 2\,(V_1 b_3^2 - V_2 b_3 b_1 + V_3 b_1^2) + V_2 \Delta_1 \\ &= 2\,(V_1 b_3^2 + V_2 b_3 b_1 + V_3 b_1^2) - V_2 b_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

und aus (83).

Die Diskussion der Ungleichung $T_1^2 \geq 0$ beginnen wir mit der größeren Wurzel δ von (76a):

$$\Delta_1 \delta = 2\,W - b_2 V_2 + 2\,\Delta$$

[vgl. (101)]. Es wird

$$\Delta_1\, T_1^2 = b_2 \Delta_1 V_3 - b_3^2\,(2\,W - b_2 V_2 + 2\,\Delta).$$

Wäre dieser Ausdruck, wie verlangt wird, positiv oder Null, so müßte

$$b_2 \Delta_1 V_3 - b_3^2\,(2\,W - b_2 V_2) \geq 2\,b_3^2 \Delta > 0$$

sein, alo auch durch Quadrieren

$$b_2^2 \Delta_1^2 V_3^2 - 2\,b_2 b_3^2 \Delta_1 V_3\,(2\,W - b_2 V_2) + b_3^4\,(2\,W - b_2 V_2)^2 \geq b_3^4 \cdot \cdot\,[(2\,W - b_2 V_2)^2 - \Delta_1 \Delta_2]$$

oder

$$b_2^2 \Delta_1 V_3^2 - 2\,b_2 b_3^2 V_3\,(2\,W - b_2 V_2) + b_3^4 \Delta_2 \geq 0.$$

Wegen der Identität

$$b_2^2 \Delta_1 V_3^2 - 2\,b_2 b_3^2 V_3\,(2\,W - b_2 V_2) + b_3^4 \Delta_2 = -\,[(b_2^2 - 2\,b_1 b_3)\,V_3 - b_3^2 V_2]^2 \tag{107}$$

kann es aber nur im Ausnahmefall (97) vorkommen, daß für die größere Wurzel δ die Bedingung (100a) erfüllt ist und zwar gilt dann das Gleichheitszeichen ($T_1^2 = 0$). Zugleich findet man bestätigt, daß, wenn $\Delta_1 > 0$ ist, $\Delta_2 > 0$ sein muß. Andernfal's würde in (101) das obere Zeichen gelten, damit $\delta > 0$ ist, und man erhielte in der eben beschriebenen Art einen Widerspruch [vom Ausnahmefall, wo (97) besteht, abgesehen].

Für die kleinere Wurzel δ wird ganz entsprechend die Bedingung

$$b_2 \Delta_1 V_3 - b_3^2\,(2\,W - b_2 V_2) \geq -\,2\,b_3^2 \Delta$$

gefordert. Sie ist erfüllt, wenn die linke Seite positiv oder Null ist. Wäre sie es nicht, wenn die linke Seite negativ ist, so müßte die Ungleichung

$$-b_2 \Delta_1 V_3 + b_3^2 (2W - b_2 V_2) > 2 b_3^2 \Delta > 0$$

bestehen, aus der durch Quadrieren analog wie oben

$$-[(b_2^2 - 2 b_1 b_3) V_3 - b_3^2 V_2]^2 > 0$$

also ein Widerspruch folgen würde. Somit ist der Satz abgeleitet:

Satz VI: Sind die Pole komplex ($\Delta_1 > 0$) und wird die Festsetzung $a_0 > 0$ getroffen, so lassen sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit eines Widerstandes durch ein zweimaschiges Netz in folgender Weise ausdrücken: Der Widerstand hat die Form (62) und es ist

$$a_4 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0$$

und

$$V_1 x_1^2 + V_2 x_1 x_2 + V_3 x_2^2$$

positiv definit [d. h. (84a), (84b) und (84c) sind erfüllt]. Darin sind

$$\Delta_1, \; V_1, \; V_2, \; V_3$$

durch (82) definiert.

Diese notwendigen und hinreichenden Bedingungen müssen mit (100b) und (100c) äquivalent sein. Daß infolge von ihnen z. B. $T_3^2 \geq 0$ ist, erkennt man sofort daraus, daß sie bei der Vertauschung (77b) in sich übergehen. Sind die Bedingungen erfüllt, so bleiben sie es auch, wenn man alle a oder b mit einem positiven Faktor multipliziert. So muß es auch sein, denn zu einem gegebenen Netzwiderstand erhält man einen zweiten, der sich vom ersten nur durch einen positiven Faktor n^2 unterscheidet, indem man die Ohmschen Widerstände des die Zuführungsklemmen enthaltenden Stromzweiges n^2-mal so groß, die Kapazität dieses Zweiges n^2-mal so klein und die Windungszahlen der im Zweig liegenden Spulen n-mal so groß macht. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich sofort, wenn man die Ströme aller einzelnen Zweige und die Kirchhoffschen Gleichungen, denen sie genügen, einführt.

Ist $\Delta_1 < 0$, so lassen sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit unseres Problems nicht in Form von Ungleichungen in den Koeffizienten von (62) rationaler Ausdrücke schreiben, wenigstens nicht ohne Fallunterscheidung. Die nun folgende geometrische Diskussion schließt sich an Foster (Lit. 9) an. Wir werden für gegebene a_i das Gebiet der $\left(x = \frac{b_2}{b_1}, \; y = \frac{b_3}{b_1}\right)$-Ebene bestimmen, in dem die Ungleichungen erfüllt sind, durch welche sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit eines Widerstandes (62)

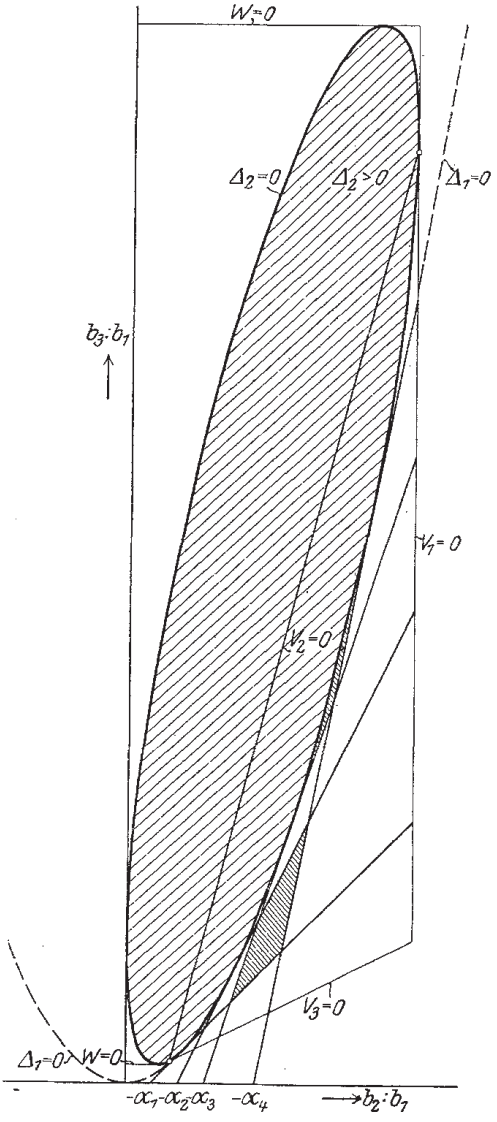

Bild 15. Bereich der Nennerkoeffizienten des Widerstandes (62) eines aus Ohmschen Widerständen, Selbstinduktionen, gegenseitigen Induktionen und Kapazitäten bestehenden zweimaschigen Netzes bei gegebenem Zähler; Fall vier reeller Nullstellen:
$\alpha_1 = -1, \; \alpha_2 = -2, \; \alpha_3 = -3, \; \alpha_4 = -4.$

durch ein zweimaschiges Netz ausdrücken lassen. Dann wird man zu gegebenen a_i (d. h. zu gegebenen Nullstellen) unmittelbar die Verhältnisse $b_1 : b_2 : b_3$ (Summe und Produkte der Pole) angeben können, welche die notwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllen.

Wegen der notwendigen Ungleichungen $V_1 > 0$, $V_3 > 0$, $W > 0$, $b_2 > 0$ liegt das zu bestimmende Gebiet sicher im Innern des durch die Geraden $W = 0$, $V_3 = 0$, $V_1 = 0$, $W = 0$, $b_2 = 0$ begrenzten Polygons (vgl. Bild 15). Nun stellt die Gleichung (76a) bei festen a_i eine vom Parameter δ abhängige Schar von Kurven zweiter Ordnung in homogenen Koordinaten b_1, b_2, b_3 dar. Jede Kurve der Schar wird von den drei Geraden-Paaren $T_1^2 = 0$, $T_2^2 = 0$, $T_3^2 = 0$ berührt. Denn nach (76), wo das Gleichheitszeichen gilt, und zwei analogen Gleichungen reduziert sich die linke Seite von (76a) für $T_v^2 = 0$ auf das Quadrat eines in b_1, b_2, b_3 linearen Ausdrucks, so daß jede der sechs Geraden $T_v^2 = 0$ ($v = 1, 2, 3$) mit (76a) nur einen Schnittpunkt hat. Da infolge von $T_1^2 \geq 0$, $T_2^2 \geq 0$, $T_3^2 \geq 0$

$$V_1 > 0,\ V_3 > 0,\ W > 0,\ \frac{b_2}{b_1} > 0$$

ist, bilden die sechs Geraden für $\delta > 0$ ein geschlossenes Polygon, das ganz im Innern des durch die Geraden $W = 0$, $V_3 = 0$, $V_1 = 0$, $W = 0$, $b_2 = 0$ begrenzten Polygons liegt. Das umschließende Polygon ist die Grenzlage der eingeschlossenen Polygone für $\delta = 0$, und seine Seiten berühren die Ellipse $\delta = 0$ ($\Delta_2 = 0$) der Schar (76a). Die reellen Ellipsen der Schar (76a) für $\delta > 0$ mit Einschluß ihrer Grenzfälle überdecken somit den gesamten zulässigen Bereich. Ordnet man (76a) nach Potenzen von b_i:

$$c_{11} b_2^2 + 2 c_{12} b_2 b_3 + c_{22} b_3^2 + 2 c_{13} b_2 b_1 + 2 c_{23} b_3 b_1 + c_{33} b_1^2 = 0 \qquad (76b)$$

und wählt $c_{11} \geq 0$, so wird die Matrix der c_{ik}:

$$c_{ik} = \left\{ \begin{array}{lll} c^2 - 4 a_0 a_4 & 2 a_0 a_3 - a_1 c & 2 a_1 a_4 - a_3 c \\ 2 a_0 a_3 - a_1 c & a_1^2 - 4 a_0 \delta & 2 \delta c - a_1 a_3 \\ 2 a_1 a_4 - a_3 c & 2 \delta c - a_1 a_3 & a_3^2 - 4 a_4 \delta \end{array} \right\}^{35}). \qquad (108)$$

Die reziproke Matrix lautet:

$$\gamma_{ik} = \left\{ \begin{array}{lll} 4 \delta U & 2 a_3 U & 2 a_1 U \\ 2 a_3 U & 4 a_4 U & 2 c U \\ 2 a_1 U & 2 c U & 4 a_0 U \end{array} \right\} \qquad (108a)$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} U \equiv -\delta^3 + 2 a_2 \delta - (a_1 a_3 + a_2^2 - 4 a_0 a_4)\delta + (-a_4 a_1^2 + a_1 a_2 a_3 - a_3 a_3^2) \\ = -[\delta - a_0(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)][\delta - a_0(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4)][\delta - a_0(\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3)] \end{array} \right\} \qquad (109)$$

Im Fall $c_{11} = c_{22} = 0$, in welchem sich der Widerstand durch eine einfache Reihenschaltung von Selbstinduktion, Ohmschem Widerstand und Kapazität darstellen läßt, reduziert sich die Kurve zweiter Ordnung auf den Punkt

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_1}{2 a_0},\quad \frac{b_3}{b_1} = \frac{c}{2 a_0}.$$

Reelle Ellipsen werden, wenn $c_{11} > 0$ oder $c_{22} > 0$, durch $\gamma_{33} = 4 a_0 U > 0$ und $|c_{ik}| = -4 U^2 < 0$ charakterisiert. Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Kurve der Schar (76a) eine reelle Ellipse darstellt, ist somit

$$a_1^2 - 4 a_0 \delta > 0 \qquad (110)$$

und

$$U > 0^{36}). \qquad (111)$$

Ist nur $U > 0$, aber $a_1^2 - 4 a_0 \delta < 0$, so liegt eine imaginäre Ellipse vor.

Läßt man δ von $-\infty$ an wachsen, so erhält man als Kurven der Schar (76a), mit der Parabel $\Delta_1 = 0$ angefangen, bis $\delta = 0$ lauter reelle Ellipsen. Die Ellipse $\delta = 0$ ($\Delta_2 = 0$) bildet die eine Grenzlage der das fragliche Gebiet überdeckenden

reellen Ellipsen. Weitere Grenzen dieses Gebiets ergeben sich durch Betrachtung der Einhüllenden der Schar (76a). Nach (102) erhält man als Gleichung der Einhüllenden $\Delta^2 = 0$ oder nach (105) die vier Geraden

$$\alpha_i^2 b_1 + \alpha_i b_2 + b_3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{112}$$

Insbesondere berühren alle Geraden der Form (112) die Parabel $\Delta_1 = 0$. Die Kurvenschar (76a) läßt sich daher auffassen als diejenige einparametrige Schar von Kurven zweiter Ordnung, welche die vier Geraden (112) berührt. Für komplexe Wurzeln sind die Geraden (112) imaginär, und außer der Ellipse $\delta = 0$ existiert keine reelle Grenze für das Gebiet, das die reellen Ellipsen $\delta > 0$ überdecken.

Es sei:

$$\alpha_1 = -\zeta_1 + i\zeta_2, \quad \alpha_2 = -\zeta_1 - i\zeta_2, \quad \alpha_3 = -\zeta_3 - i\zeta_4, \quad \alpha_4 = -\zeta_3 + i\zeta_4,$$

wo $\zeta_i > 0$. Alle Wurzeln von $U = 0$ sind jetzt positiv und die kleinste

$$\delta_1 = a_0 (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) \tag{113}$$

wird $\delta_1 = 4 a_0 \zeta_1 \zeta_3$. Sicher ist für $\delta < \delta_1$

$$\frac{\delta}{a_0} < \left(\frac{a_1}{2 a_0}\right)^2 = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)^2 = (\zeta_1 + \zeta_3)^2$$

und damit (110) erfüllt, so daß für $\delta < \delta_1$ reelle Ellipsen vorliegen, die für $\delta = \delta_1$ in ein Stück einer Doppelgeraden ausarten. Da benachbarte Ellipsen sich im Reellen nicht schneiden, so füllen die Ellipsen $0 < \delta \leq \delta_1$ gerade das Innere der Ellipse $\delta = 0$ aus. Damit ist das zu bestimmende Gebiet auch erschöpft. Bezeichnet δ_2 die mittlere Wurzel von $U = 0$,

$$\delta_2 = a_0 (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4), \tag{114}$$

so wird

$$\delta_2 = a_0 [(\zeta_1 + \zeta_3)^2 + (\zeta_2 - \zeta_4)^2].$$

Dann ist zwar auch für $\delta > \delta_2$ (111) erfüllt. Die Ellipsen sind aber dann imaginär, weil

$$\frac{\delta}{a_0} > \left(\frac{a_1}{2 a_0}\right)^2 = (\zeta_1 + \zeta_3)^2.$$

Da die Ellipse $\delta = 0$ oder $\Delta_2 = 0$ wegen fehlender reeller Einhüllenden oberhalb der Parabel $\Delta_1 = 0$ (vgl. Bild 15) liegen muß, sind bei komplexen Wurzeln α_i notwendig auch die Pole β_i komplex [$\Delta_1 > 0$].

Sind zwei verschiedene reelle Nullstellen vorhanden:

$$\alpha_1 = -\zeta_1, \quad \alpha_2 = -\zeta_2; \quad \alpha_3 = -\zeta_3 + i\zeta_4, \quad \alpha_4 = -\zeta_3 - i\zeta_4 \quad (\zeta_i > 0),$$

so hat $U = 0$ nur die eine positive Wurzel (113)

$$\delta_1 = 2 a_0 (\zeta_1 + \zeta_2) \cdot \zeta_3$$

und für $\delta < \delta_1$ ist

$$\frac{\delta}{a_0} < \left(\frac{a_1}{2 a_0}\right)^2 = \left(\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} + \zeta_3\right)^2,$$

so daß wieder (110) erfüllt wird. Im Fall zweier verschiedener reeller Wurzeln überdecken danach ebenfalls die Ellipsen $0 < \delta \leq \delta_1$ das ganze zulässige Gebiet der $\left(\frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_1}\right)$-Ebene. Da zwei der Geraden (112) jetzt reell sind, wird es aber jetzt außer durch ein Stück der Ellipse $\delta = 0$ durch ein Stück der Geraden

$$\alpha_1^2 b_1 + \alpha_1 b_2 + b_3 = 0$$

und

$$\alpha_2^2 b_1 + \alpha_2 b_2 + b_3 = 0$$

begrenzt. Zu dem Ellipseninnern kommt noch das Eckgebiet, das von der Ellipse und den beiden Geraden begrenzt wird, einschließlich der Grenze hinzu.

Sind endlich alle vier Wurzeln reell (Bild 15), $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$, so hat $U = 0$ wieder drei reelle Wurzeln, und wieder ist die kleinste durch (113) und die mittlere durch (114) gegeben. Für

$$0 < \delta \leq \delta_1 \tag{115a}$$

und

$$\delta_2 \leq \delta \leq \delta_3, \tag{115b}$$

worin δ_3 die größte Wurzel von $U = 0$ bedeutet:

$$\delta_3 = a_0 (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3), \tag{116}$$

ist

$$\frac{\delta}{a_0} < \left(\frac{a_1}{2\,a_0}\right)^2 = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)^2,$$

und daher existieren die beiden getrennten Bereiche (115a) und (115b) von reellen Ellipsen, die zwei getrennte Gebiete der $\left(\frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_1}\right)$-Ebene überdecken. Das erste Gebiet ist von einem Bogen der Ellipse $\Delta_2 = 0$, zwei Stücken der den beiden absolut kleinsten Nullstellen α_1, α_2 entsprechenden Geraden (112), wieder einem Bogen der Ellipse $\Delta_2 = 0$ und zwei Stücken der den beiden absolut größten Nullstellen α_3 und α_4 entsprechenden Geraden begrenzt. Es enthält außer dem einfach überdeckten Innern der Ellipse $\Delta_2 = 0$ die beiden doppelt überdeckten Eckgebiete, die von einem Ellipsenbogen und zwei Geraden-Stücken begrenzt werden. Für $\delta = \delta_1$ arten die das erste Gebiet überdeckenden Ellipsen in diejenige Doppelstrecke aus, welche die Schnittpunkte der beiden ersten und der beiden letzten der vier Geraden (112) verbindet. Das zweite, ebenfalls doppelt überdeckte Gebiet wird durch das von den vier Geraden (112) begrenzte Viereck gebildet.

Im Fall von zwei oder vier reellen Nullstellen müssen die Eckgebiete und das Viereck, die doppelt überdeckt werden, ganz unterhalb der Parabel $\Delta_1 = 0$ (Bild 15) liegen. Die Parabel schneidet also die Ellipse $\Delta_2 = 0$[37]). Denn nach Satz VI ist im Fall $\Delta_1 > 0$ nur das Innere der Ellipse $\Delta_2 = 0$ mit den physikalischen Forderungen verträglich, und nach den zuvor gemachten Ausführungen geht durch jeden zulässigen Punkt nur eine einzige Ellipse der Schar (76a). Wegen der notwendigen Bedingung $\mathrm{Re}[\mathfrak{R}(i\omega)] > 0$ müssen die Eckgebiete und das Viereck rechts von der Geraden $V_2 = 0$ liegen (vgl. Bild 15), welche die Ellipse $\Delta_2 = 0$ in den Berührungspunkten mit den Geraden $V_1 = 0$ und $V_3 = 0$ schneidet.

10. Eine besondere die nach Kapitel II realisierbaren Widerstände umfassende Klasse von Widerständen.

Es seien $\mathfrak{z}$, $\frac{1}{\mathfrak{y}}$ beliebige realisierbare Widerstände; dann ist auch jede Funktion

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{|\mu_1 \mathfrak{y}} + \frac{1}{|\mu_2 \mathfrak{z}} + \frac{1}{|\mu_3 \mathfrak{y}} + \frac{1}{|\mu_4 \mathfrak{z}} + \ldots, \tag{145}$$

wo μ_i positive Zahlen sind, realisierbar. Sie läßt sich in Form eines Stieltjesschen Kettenbruches mit dem Argument $\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ schreiben, nämlich:

$$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{z}} = \frac{1}{|\mu_1 \mathfrak{y}\,\mathfrak{z}} + \frac{1}{|\mu_2} + \frac{1}{|\mu_3 \mathfrak{y}\,\mathfrak{z}} + \frac{1}{|\mu_4} + \ldots \tag{145a}$$

Daraus läßt sich folgern, daß jede Kettenschaltung nach Bild 2, in der alle $\mathfrak{z}$ mit geradem und alle $\mathfrak{z}$ mit ungeradem Index sich nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden, einer weiteren Kettenschaltung sowie einer Reihen-Parallel- und einer Parallel-Reihen-Schaltung (und Kombinationen solcher Schaltungen) äquivalent ist. Sonderfälle dieses allgemeinen Satzes findet man in den Arbeiten Lit. 14 und 15 behandelt. Als Beispiel für einen realisierbaren Kettenbruch der Gestalt (145) führen wir

$$i \log \frac{\lambda + a_1 - i\,a_2}{\lambda + a_1 + i\,a_2} = \frac{2\,a_2|}{|\lambda + a_1} + \frac{{a_2}^2|}{|3(\lambda + a_1)} + \frac{4\,{a_2}^2|}{|5(\lambda + a_1)} + \frac{9\,{a_2}^2|}{|7(\lambda + a_1)} + \ldots \tag{146}$$

an. Diese Beziehung folgt aus Lit. 23 S. 454 oben als Sonderfall. Für $a_1 > 0$,

$a_2 > 0$ entspricht der Kettenbruch einer Schaltung Bild 2, in welcher die $\mathfrak{z}$ mit ungeradem Index aus einer Reihenschaltung von Ohmschem Widerstand und Selbstinduktion und die $\mathfrak{z}$ mit geradem Index aus einer Parallelschaltung von Ohmschem Widerstand und Kapazität bestehen. Durch eine (145) entsprechende Schaltung läßt sich auch der in Abschnitt 3 nicht diskutierte Widerstand einer unendlich langen homogenen Leitung, wenn keine der vier Leitungskonstanten verschwindet, nachbilden (vgl. Lit. 18).

Zusammenfassung der Resultate.

Für den Fall, daß im Netz nur zwei Widerstandsarten (Ohmsche Widerstände und Kapazitäten, Kapazitäten und Selbstinduktionen einschließlich gegenseitiger Induktionen, Selbstinduktionen und Ohmsche Widerstände) vorhanden sind, wird das Problem der Verwirklichung eines als Funktion der Frequenz vorgegebenen Widerstandes in praktisch brauchbarer Weise gelöst (Satz I bis III). Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit werden in einer Form gegeben, die in den Koeffizienten der darzustellenden Funktion rational ist (Satz IV). Weiter wird gezeigt, welche nichtrationalen Funktionen der Frequenz durch unendliche Netze dargestellt werden können [Abschnitt 3 [1])]. Für den Fall, daß alle drei Widerstandsarten im Netz vorhanden und nur zweimaschige Netze zugelassen sind, werden die bei Foster Lit. 9 gegebenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit eines Widerstandes auf eine einfachere Form gebracht (Satz VI) und ihre physikalische und mathematische Bedeutung diskutiert. Die bereits von Foster für zweimaschige Netze in vollständiger und praktisch brauchbarer Weise gegebene Lösung wird auf neuem Wege ausführlich abgeleitet, wobei der Hauptwert auf die Lösungsmethode, welche Schlüsse auf Netze mit mehr als zwei Freiheitsgeraden gestattet, gelegt wird. Für den allgemeinen Fall wird ein Satz (Satz VII) über die Abhängigkeit gewisser notwendiger Bedingungen voneinander abgeleitet und bewiesen, daß in jenen notwendigen Bedingungen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit im Grenzfall verschwindender Ohmscher Widerstände enthalten sind [Abschnitt 8 [1])]. Eine Lösungsmethode für den allgemeinen Fall wird kurz und ohne Beweis skizziert [Abschnitt 9 [1])]. Für eine besondere Klasse von Schaltungen wird ein Umbildungssatz abgeleitet (Abschnitt 10).

Anmerkungen.

[1]) Die von Herrn Foster in Lit. 9 angekündigte Arbeit über die Lösung unseres Problems für eine beliebige Anzahl von Freiheitsgraden ist bisher noch nicht erschienen und wird, wie ich einer freundl. Mitteilung des Herrn Foster vom 8. 4. 26 entnehme, voraussichtlich in etwa einem Jahre veröffentlicht werden.

[2]) Vgl. z. B. Lit. 3 u. 4.

[3]) Zwischen Spannung $\mathfrak{E}_1$ und Strom J_1 an den Eingangsklemmen und Spannung $\mathfrak{E}_2$ und Strom J_2 an den Ausgangsklemmen eines vierpoligen Netzes N bestehen Beziehungen der Gestalt (4) des Textes mit nur von der Frequenz abhängigen A_{ik}, wenn dort die rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen in $\mathfrak{E}_1$ und $-\mathfrak{E}_2$ geändert werden. Mit den Bezeichnungen von Kap. I folgt daraus durch Auflösung nach $\mathfrak{E}_1$ und J_1

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{a_{22}}{a_{12}}\mathfrak{E}_2 + \frac{a}{a_{12}}J_2 = b_{11}\mathfrak{E}_2 + b_{12}J_2$$

$$J_1 = \frac{a_{11\,22}}{a_{12}}\mathfrak{E}_2 + \frac{a_{11}}{a_{12}}J_2 = b_{21}\mathfrak{E}_2 + b_{22}J_2$$

und weiter für den im Text erwähnten Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand $\mathfrak{z}_0 = \frac{b_{11}}{b_{21}}$, $\mathfrak{z}_k = \frac{b_{12}}{b_{22}}$.

Die Determinante dieser Gleichungen hat nach einem bekannten Determinantensatz (vgl. z. B. Kowalewski, „Einführung in die Determinantentheorie", Leipzig, Veit & Co., 1909, Satz 28) wegen der Symmetrie $a_{12} = a_{21}$ den Wert 1. Nach $(-\mathfrak{E}_2)$, J_2 aufgelöst lauten sie

$$(-\mathfrak{E}_2) = b_{22}(-\mathfrak{E}_1) + b_{12}J_1$$
$$J_2 = b_{21}(-\mathfrak{E}_1) + b_{11}J_1.$$

[1]) Vgl. Fußnote [2]) S. 355.

Daher ergibt eine Reihenschaltung eines Netzes N mit sich selbst (das zweite N in umgekehrter Richtung geschaltet) nach Bild 1a die folgenden Beziehungen von Spannung und Strom am Anfang und Spannung und Strom am Ende, die wieder mit den Indizes 1 und 2 bezeichnet werden sollen:

$$\mathfrak{E}_1 = (b_{11}\,b_{22} + b_{12}\,b_{21})\,\mathfrak{E}_2 + 2\,b_{11}\,b_{12}\,J_2$$
$$J_1 = 2\,b_{22}\,b_{21}\,\mathfrak{E}_2 + (b_{11}\,b_{22} + b_{12}\,b_{21})\,J_2.$$

Als Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand der ganzen Schaltung Bild 1a ergibt sich hieraus ebenso wie aus Bild 1b

$$2\,\mathfrak{Z}_0 = \frac{b_{11}\,b_{22} + b_{12}\,b_{21}}{b_{22}\,b_{21}} = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_k$$

und

$$\frac{2}{\mathfrak{Z}_k} = \frac{b_{11}\,b_{22} + b_{12}\,b_{21}}{b_{11}\,b_{12}} = \frac{1}{\mathfrak{z}_0} + \frac{1}{\mathfrak{z}_k}.$$

Hierdurch ist aber die Behauptung des Textes bewiesen, da ein symmetrisches vierpoliges Netz durch die zwei Konstanten $\mathfrak{Z}_0$ und $\mathfrak{Z}_k$ charakterisiert wird (von einer Vertauschung der beiden Endklemmen 2, 2′ untereinander abgesehen). Für den Sonderfall eines symmetrischen Netzes N hat Campbell Lit. 5 den Satz ausgesprochen. Lit. 17 enthält einen Beweis für den besonderen Fall, daß an Stelle von Schaltung Bild 1a ein symmetrisches nach Bild 2 geschaltetes Kettenglied tritt.

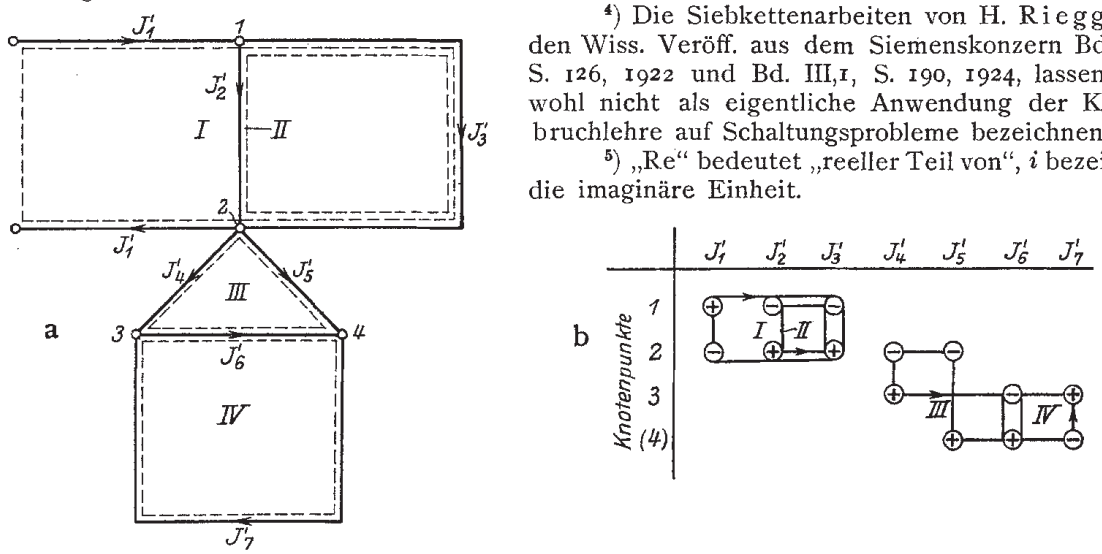

Bild 16. Zur Definition der J und der J′.
a) Beispiel einer Schaltung, b) zugehöriges Schema der m_{rs}.

[4]) Die Siebkettenarbeiten von H. Riegger in den Wiss. Veröff. aus dem Siemenskonzern Bd. I, 3, S. 126, 1922 und Bd. III,1, S. 190, 1924, lassen sich wohl nicht als eigentliche Anwendung der Kettenbruchlehre auf Schaltungsprobleme bezeichnen.

[5]) „Re" bedeutet „reeller Teil von", i bezeichnet die imaginäre Einheit.

[6]) Diese Ungleichungen (6) werden bei Foster nicht erwähnt.

[6a]) Die Bedeutung von J_v und J_v' soll hier noch etwas mehr erläutert werden. Setzt man $J_v = \frac{d\,q_v}{dt}$, so daß q_v die durch den Stromkreis v von einem gewissen Zeitpunkt an durchgeflossene Elektrizitätsmenge darstellt, so besteht eine vollkommene Analogie mit den kleinen Schwingungen der Mechanik. $\sum_{i,k=1}^{n} L_{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k$ entspricht der kinetischen Energie, $\sum_{i,k=1}^{n} D_{ik}\,q_i\,q_k$ entspricht der potentiellen Energie, $\sum_{i,k=1}^{n} R_{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k$ der Dissipationsfunktion. Die q_v sind unabhängige Koordinaten, die den J_v' entsprechenden q_v' sind Koordinaten, zwischen denen Nebenbedingungen $\sum_{s=1}^{n+k} m_{rs}\,q_s' = 0$ bestehen (wenn der Zeitpunkt, zu dem die Elektrizitätsmengen q_v' Null sind, geeignet gewählt wird). In den (4a) entsprechenden mechanischen Bewegungsgleichungen sind die μ_i Lagrangesche Multiplikatoren.

Zwischen den q_v und q_v' bestehen Relationen $q_v' = \sum_{\varrho=1}^{n} c_{v\varrho}\,q_\varrho$. Darin sind die $c_{v\varrho} = +1, -1$, oder 0, je nachdem die Stromrichtung von J_v' mit der von J_ϱ übereinstimmt oder nicht oder der Zweig v im Stromkreise ϱ gar nicht vorkommt. Es soll festgesetzt werden, daß $m_{rs} = +1$ oder -1 ist, je nachdem der Zweigstrom J_s' auf den Knotenpunkt r zufließt oder von ihm fortfließt.

Als Beispiel diene die Schaltung Bild 16a ($n = 4$, $k = 3$). Als Schema der m_{rs} erhält man hier für die Knotenpunkte 1, 2, 3, wenn man das Schema noch durch den vierten Knotenpunkt ergänzt (entsprechend einer von den drei ersten abhängigen vierten Beziehung zwischen den J_v') Bild 16b, und es wird $J_1' = J_1$, $J_2' = J_2$, $J_3' = J_1 - J_2$, $J_4' = J_3$, $J_5' = -J_3$, $J_6' = J_3 + J_4$, $J_7' = J_4$.

[7]) Hierauf machte mich Herr Professor Dr. E. Jacobsthal aufmerksam.

[8]) Von der zugehörigen Schaltung behauptet Foster (Lit. 9, S. 677), daß durch sie jeder Widerstand eines Netzes von n Freiheitsgraden verwirklicht werden kann.

[9]) Vgl. z. B. Lit. 28 oder ausführlicher Lit. 21, S. 54, Abschnitt 58. Ein einfacher Beweis ergibt sich auch, indem man die letzten $(n-1)$ Variabelen der Form $\sum_{i,k=1}^{n} (\lambda R_{ik} + D_{ik}) x_i x_k$ auf Hauptkoordinaten transformiert.

[10]) Daß man durch eine Partialbruchzerlegung zum Ziel kommt, zeigte Foster für den analogen Fall, daß das Netz nur Selbstinduktionen, gegenseitige Induktionen und Kapazitäten enthält (Lit. 7).

[11]) In Satz III sind die Theoreme von Zobel (Lit. 6, S. 5) und Foster (Lit. 7, S. 259) enthalten.

[12]) Vgl. Zobel (Lit. 6, S. 45/46), Johnson und Shea (Lit. 10, S. 77/78).

[26]) Diese Bedingungen finden sich schon bei E. J. Routh „Stability of Given State of Motion", 1877, jedoch nicht in der einfachen Determinantenform, die ihnen Hurwitz gegeben hat. Einen einfachen Beweis für die Hurwitzschen Kriterien gibt. I. Schur in der Zeitschrift für angew. Mathematik und Mechanik I, S. 307 bis 311, 1921 (vgl. auch Lit. 26) durch Zurückführung der Hurwitzschen Gleichung n-ten Grades auf eine $(n-1)$-ten Grades. Die Methode von Schur hat Cohn (Lit. 27) darauf übertragen, die Anzahl der Wurzeln eines Polynoms im Einheitskreis zu bestimmen. Für unsere Zwecke ist der Hurwitzsche Beweis, der auch die Bedeutung der Ungleichungen (56) am besten erkennen läßt, am meisten geeignet.

[27]) Vgl. Lit. 22. Einen einfachen Beweis gibt Grommer, Lit. 24, S. 124.

[28]) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir wieder annehmen, daß $a_0 > 0$ ist.

[29]) Die im Text erwähnte Elimination kann nach Foster (Lit. 9) in folgender Weise geschehen: In die Gleichungen (66), (65), (64) setzt man für L_{11}, R_{11}, D_{11} die Werte (63), (71), (67) ein und erhält so

$$(R_{12} D_{22} - R_{22} D_{12})^2 = k^2 (-a_4 R_{22}^2 + a_3 R_{22} D_{22} - \delta D_{22}^2) = k^6 T_1^2$$
$$(D_{12} L_{22} - D_{22} L_{12})^2 = k^2 (-a_0 D_{22}^2 + c D_{22} L_{22} - a_4 L_{22}^2) = k^6 T_2^2$$
$$(L_{12} R_{22} - L_{22} R_{12})^2 = k^2 (-\delta L_{22}^2 + a_1 L_{22} R_{22} - a_0 R_{22}^2) = k^6 T_3^2.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind aber vom Faktor k^6 abgesehen nach (68), (69), (70) Funktionen von a_0, a_1, c, a_3, a_4, δ, b_1, b_2, b_3 allein, nämlich

$$T_1^2 = -a_4 b_2^2 + a_3 b_2 b_3 - \delta b_3^2,$$
$$T_2^2 = -a_0 b_3^2 + c b_3 b_1 - a_4 b_1^2,$$
$$T_3^2 = -\delta b_1^2 + a_1 b_1 b_2 - a_0 b_2^2.$$

Wegen der Identität

$$L_{22}(R_{12} D_{22} - R_{22} D_{12}) + R_{22}(D_{12} L_{22} - D_{22} L_{12}) + D_{22}(L_{12} R_{22} - L_{22} R_{12}) = 0$$

ergibt sich für δ die mit der quadratischen Gleichung des Textes gleichwertige Beziehung:

$$\pm b_1 T_1 \pm b_2 T_2 \pm b_3 T_3 = 0.$$

[30]) Nach (1) ist zunächst für komplexe Frequenzen $\lambda = \varrho + i\omega$ die Leistung $e\,i = e^{2\varrho t} \mathrm{Re}(\mathfrak{E} J e^{2i\omega t} + \mathfrak{E} \bar{J})$ ($\bar{J}$ bedeutet darin den zu J konjugiert komplexen Wert) oder

$$e\,i = |J|^2 e^{2\varrho t} \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{\mathfrak{E}}{J} \cdot e^{2i\omega t} + \mathfrak{R}\right).$$

Für $\varrho > 0$ folgt

$$\frac{1}{|J|^2} \int_{-\infty}^{t} e\,i\,dt = e^{2\varrho t} \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{\mathfrak{E}}{J} \cdot \frac{e^{2i\omega t}}{2(\varrho + i\omega)} + \frac{\mathfrak{R}}{2\varrho}\right) > 0,$$

da die dem Netz seit der Entstehung der anklingenden Schwingung zugeführte Leistung positiv ist. Dies gilt auch für solche Zeiten, wo das erste Glied in der Klammer rein imaginär ist. Daher ergibt sich $\mathrm{Re}\,\mathfrak{R}[(\varrho + i\omega)] > 0$, wenn $\varrho > 0$. Ist $\varrho = 0$, so ergibt sich in bekannter Weise durch Mittelwertbildung über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} e\,i\,dt = |J|^2 \mathrm{Re}[\mathfrak{R}(i\omega)] > 0.$$

Es ist plausibel, daß die notwendige Bedingung $\mathrm{Re}[\mathfrak{R}(i\omega)] > 0$, die im Text allein benutzt wird, mehr aussagt als die notwendige Bedingung $\mathrm{Re}[\mathfrak{R}(\varrho + i\omega)] > 0$, wo $\varrho > 0$. Nimmt der Widerstand für $\lim \omega \to 0$ oder $\omega \to \infty$ wie in (8) einen unendlich großen Wert an, so bleibt doch $\lim \mathrm{Re}\,\mathfrak{R} > 0$ endlich, weil die Leistung wie $|J|^2$ gegen Null strebt.

[31]) Vgl. Foster Lit. 9, S. 674, Critical Line 2.

[32]) $c > o$ folgt hieraus.

[33]) Vgl. Foster, Lit. 9, Theorem II. Im allgemeinen gibt es nur eine Lösung für jede der zwölf Schaltungen. Nur wenn der Zähler von (62) nicht bloß komplexe Wurzeln und der Nenner reelle Wurzeln hat, kann es zwei zulässige Lösungen δ von (76a) geben.

[34]) Wenn der Zähler komplexe Wurzeln hat, so muß auch der Nenner komplexe Wurzeln haben. Physikalisch bedeutet dies: wenn man in einem zweimaschigen geschlossenen Netz mit zwei periodischen Eigenschwingungen einen Zweig öffnet, so erhält man notwendig einen periodischen elektrischen Schwingungskreis.

[35]) Es kommen nur δ in Frage, für die $c_{11} \geq o$, $c_{22} \geq o$, $c_{33} \geq o$ ist, weil sonst T_1^2, T_2^2, T_3^2 negativ definit wären.

[36]) Übt man die Vertauschungen (77) auf

$$-a_4 a_1^2 + a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 > o$$

aus, so gelangt man zu ähnlich gebauten Ungleichungen, die erfüllt sein müssen:

$$-\delta^3 + 2 a_2 \delta^2 - (a_1 a_3 + a_2^2 + a_1 a_0)\delta + (-a_4 a_1^2 + a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_0) > o$$

und

$$-\delta^3 + 2 a_2 \delta^2 - (a_1 a_3 + a_2^2 + a_3 a_4)\delta + (a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2) > o.$$

[37]) Dies ist in Bild 15 nicht zu erkennen, weil Ellipse und Parabel nahezu zusammenfallen.

Literatur.

1. Feußner, W., Annalen der Physik, Bd. 9, S. 1304, 1902 u. Bd. 15, S. 385, 1904 (Vereinfachte Berechnung von Netzwiderständen ohne Determinanten).
2. Campbell, G. A., „Cisoidal Oscillations", Transactions of American Instutition of Electrical Engineers, Bd. 30, 2, S. 873—909, 1911 (Berechnung von Netzwiderständen mittels Determinanten).
3. Wagner, K. W., Arch. f. Elektrot. Bd. III, S. 315, 1915 (Kettenleiter).
4. Wagner, K. W., Arch. f. Elektrot., Bd. VIII, S. 61, 1919 (Siebketten). Telefunkenzeitung Jgg. 6, S. 21, 1924 (Allgemeiner Kettenleiter).
5. Campbell, G. A., „Physical Theory of the Electric Wave-Filter", The Bell System Technical Journal, Nov. 1922.
6. Zobel, O. J., „Theory and Design of Uniform and Composite Electric Wave-Filters", The Bell System Technical Journal, Jan. 1923.
7. Foster, R. M., „A Reactance Theorem", The Bell System Technical Journal, April 1924.
8. Hoyt, R. S., „Impedance of Loaded Lines and Design of Simulating and Compensating Networks", Bell System T. J., Juli 1924.
9. Foster, R. M., „Theorems Regarding the Driving-Point Impedance of Two Mesh Circuits", Bell System T. J., Okt. 1924.
10. Johnson, K. S. and Shea, T. E., „Mutual Inductance in Wave Filters with an Introduction on Filter Design", Bell System T. J., Jan. 1925.
11. Carter, Joe C. W., „Graphic Representation of the Impedance of Resistance Networks Containing Two Reactances", Bell System T. J., Juli 1925.
12. Küpfmüller, „Über einen Umwandlungssatz zur Theorie der linearen Netze", Wissenschaftl. Veröffentlichungen a. d. Siemenskonzern. Bd. III,1, S. 130, 1924.
13. Byk, A., „Neue Verfahren zur Nachbildung von Pupinleitungen", Elektrische Nachrichtentechnik 1925.
14. The Research Staff of the General Electric Company, Ltd., Philosophical Magazine, Nov. 1924.
15. General Electric Company, Ltd., Philosophical Magazine, April 1925.
16. General Electric Company, Ltd., Philosophical Magazine, May 1925.
17. General Electric Company, Ltd., Philosophical Magazine, Febr. 1926.
18. General Electric Company, Ltd., Journal of the Institution of Electrical Engineers, Juni 1925.
19. General Electric Company, Ltd., Post Office Electrical Engineers Journal, Jan. 1926.
20. Hurwitz, A., „Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt", Mathematische Annalen, Bd. 36, S. 273, 1895.
21. Routh, E. J., „Die Dynamik der Systeme starrer Körper", Bd. 2, Teubner 1898.
22. Weber, „Lehrbuch der Algebra" (Kleine Ausgabe), Vieweg 1912, § 37.
23. Perron, O., „Die Lehre von den Kettenbrüchen", Teubner 1913.
24. Grommer, J., „Ganze transcendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen", Crelles Journal Bd. 144, S. 114, 1914.
25. Schur, I., Zeitschr. f. angew. Mathematik I, S. 307—311, 1921.
26. v. Mises, R., Riemann-Webers „Differentialgleichungen der Physik I", Vieweg 1925, S. 125 ff.
27. Cohn, Mathematische Zeitschr. Bd. 14, S. 110—148, 1922. (Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung im Einheitskreise.)
28. Whittaker, E. T., „Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper", Springer 1924, § 78.